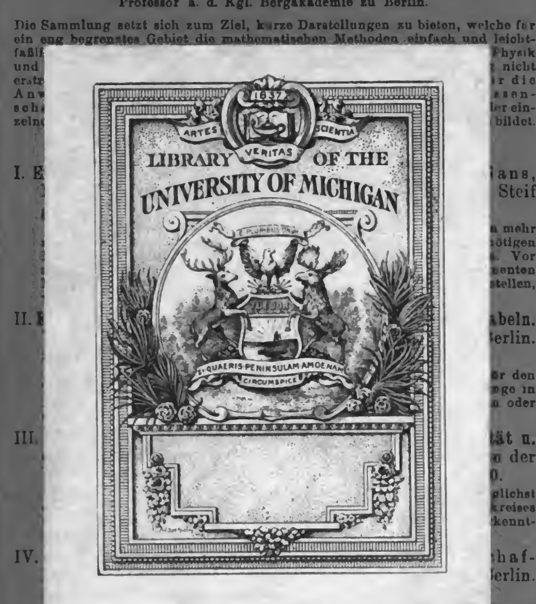
Grundzüge der mathematisc... Akustik

Alfred Kalähne

Sammlung
Mathematisch-physikalischer Schriften

Herausgegeben von **Dr. E. Jahnke,**
Professor a. d. Kgl. Bergakademie zu Berlin.

Die Sammlung setzt sich zum Ziel, kurze Darstellungen zu bieten, welche für ein eng begrenztes Gebiet die mathematischen Methoden einfach und leicht-faßli… Physik und … nicht erst… für die Anw… issen-sch… der ein-zeln… bildet.



I. E… ians, … Steif … mehr … ötigen … Vor … enten … stellen,

II. … abeln. … Berlin. … für den … nge in … n oder

III. … ität u. … n der … 0. … glichst … kreises … kennt-

IV. … haf-… Berlin. … en die wichtigsten Eigenschaften der Funktionen und ihre Darstellung durch Reihen und bestimmte Integrale besprochen.

V. **Funktionentafeln mit Formeln und Kurven.** Von Dr. E. Jahnke, Prof. an der Kgl. Bergakademie Berlin, und F. Emde, Prof. i. Clausthal i. Harz. gr. 8. 1909. In Leinwand geb. *M* 6.—

In dem vorliegenden Werk findet man das bisher schwer zugängliche Tafelmaterial für eine ganze Reihe von Transzendenten, wie Hyperbelfunktionen, Sinus- und Cosinusintegral, Integrallogarithmus, Gammafunktion, Fehlerintegral, Fresnelsche Integrale, elliptische Integrale und Funktionen, Kugelfunktionen und Besselsche Funktionen, vermehrt um eine Reihe neuberechneter Tafeln, die sich vornehmlich auf die Besselschen Funktionen beziehen. Sämtliche Tafeln sind in Kurven umgesetzt worden. Auch die notwendigsten Formeln sind beigegeben worden.

X 11.

XIII. **Theorie der elliptischen Funktionen.** Von Dr. Martin Krause, Professor an der Techn Hochschule zu Dresden. Unter Mitwirkung von Dr. Emil Naetsch, Professor an der Techn. Hochschule zu Dresden. 8. 1912. Geh. ℳ 3.60, geb. ℳ 4.—

Das Werk enthält eine kurz gefaßte Theorie derjenigen Teile der elliptischen Transzendenten, die für die Anwendungen von besonderer Bedeutung sind.

XIV. **Konforme Abbildung.** Von Dr. L. Lewent, weil. Oberlehrer in Berlin. Herausgegeben von Dr. Eugen Jahnke, ord. Prof. an der Kgl. Bergakad. Berlin. Mit einem Beitrag von Privatdozent Dr. W. Blaschke in Greifswald. 8. 1912. Geh. ℳ 2.80, geb. ℳ 3.20.

Die Schrift soll die Kluft überbrücken helfen, die noch immer zwischen der reinen und angewandten Mathematik gähnt. Von Herrn Blaschke stammt die Darstellung der konformen Abbildung durch elliptische Funktionen.

XV. **Mathematische Instrumente.** Von Dr. A. Galle, Professor am Kgl. Geodätisch. Institut in Potsdam. 8. 1912. Geh. ℳ 4.40, geb. ℳ 4.80.

Außer in den enzyklopädischen Darstellungen fehlte bei uns in Deutschland noch immer eine zusammenfassende Darstellung der namentlich in neuerer Zeit in großer Zahl konstruierten mathematischen Instrumente. Die vorliegende Bearbeitung ist bestimmt, diese Lücke in unserer Literatur auszufüllen.

XVI. **Dispersion und Absorption des Lichtes** in ruhenden isotropen Körpern. Theorie und ihre Folgerungen. Von Dr. D. A. Goldhammer, Professor an der Universität Kasan. 8. 1912. Geh. ℳ 3.60, geb. ℳ 4.—

Das Buch hat den Zweck, den Lesern, besonders auch den Studierenden, eine möglichst einfache und klare Darlegung des modernen Standes der Theorie der Dispersion und Absorption des Lichtes in den isotropen ruhenden Körpern zu geben. Die Resultate der Theorie sind an mehreren Zahlenbeispielen in Form der Tabellen und Kurven erläutert, die teils schematisch, teils aus den neuesten Arbeiten über die Dispersion und Absorption des Lichtes entnommen sind.

XVII. **Technische Hydromechanik.** 2 Teile. Von Dr. R. v. Mises, Professor an der Universität Straßburg i. Els. 8. 1913.

Das vorliegende Buch will vor allem die Kenntnisse vermitteln, deren der Ingenieur bei Ausführung selbständiger Arbeiten bedarf. Es ist daher neben dem Streben nach begrifflicher Klarheit das Hauptaugenmerk auf Bereitstellung eines zuverlässigen Zahlenmaterials gerichtet gewesen Es werden behandelt: Grundlagen d. Hydromechanik. Die gleichförmige Strömung in Rohrleitungen, die Stautheorie sowie Einzelfragen unter Anwendung von neuen noch wenig bekannten Experimetaluntersuchungen.

In Vorbereitung befinden sich folgende Bände:

Die Randwertaufgaben in der theoretischen Physik. Von P. Debye.
Potentialtheorie. Von R. Gans.
Schwingungsprobl. V. E. Grüneisen.
Festigkeitsprobleme der modernen Maschinentechnik. Von Th. v. Karman.
Thermoelektrizität. Von F. Krüger.
Einführung in die Elastizitätstheorie. (2 Teile.) Von R. Marcolongo.
Die Streuung des Transformators. Von W. Rogowski.
Die partiellen Differentialgleichungen. Von R. Rothe.
Die Theorie der Ionisation der Gase. (2 Teile.) Von G. Rümelin.
Ausgewählte Spannungsprobleme des Bauingenieurs. Von A. Timpe.

Die Sammlung wird fortgesetzt.

SAMMLUNG MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHER SCHRIFTEN
HERAUSGEGEBEN VON E. JAHNKE
11,2

GRUNDZÜGE DER MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHEN AKUSTIK

VON

DR. ALFRED KALÄHNE
PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE
ZU DANZIG

II. TEIL

MIT 57 FIGUREN IM TEXT



LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1913

VORWORT ZUM ZWEITEN TEIL.

Der vorliegende zweite Teil der mathematisch-physikalischen Akustik enthält die Theorie der Schwingungen elastischer Körper, die ja den eigentlichen Gegenstand der Akustik bilden. Wegen der notwendigen Beschränkung des Umfanges konnte natürlich nur ein Ausschnitt aus der Theorie gegeben werden. Daher mußten manche interessanten Teile ganz bei Seite gelassen, andere konnten nur gestreift werden. Ich habe es aber nach Möglichkeit vermieden, Gebiete zu betreten, die nicht genauer behandelt werden konnten. Denn eine nur oberflächliche Besprechung wie in populären Darstellungen oder eine ganz kurze, nur dem Fachmann verständliche Mitteilung der Rechnungsergebnisse, wie sie in Handbüchern und Enzyklopädien erforderlich und üblich ist, hätte dem Zweck dieses Buches nicht entsprochen, das ja dem mathematisch und physikalisch etwas geschulten Nichtfachmann eine zugleich leichtverständliche und doch gründliche Einführung in die wichtigsten Teile der theoretischen Akustik bieten soll. Um diesem Zweck zu genügen, habe ich die Darstellung der wirklich behandelten Gebiete so ausführlich gehalten, daß sie ein vollständiges Bild der Behandlung dieser und ähnlicher Probleme und eine Anleitung und Grundlage zum selbständigen Studium akustischer Probleme in größeren Werken und Originalabhandlungen zu bieten vermag. Aus diesem Grunde ist auch der einleitende Abschnitt aus der Elastizitätstheorie hinzugenommen worden, weil gerade die Behandlung schwierigerer akustischer Probleme dieser Grundlage bedarf, in größeren Werken wie Lord Rayleighs „Theory of Sound" u. a. aber ihre Kenntnis ohne weiteres vorausgesetzt wird und das Fehlen jeder Unterstützung nach dieser Richtung hin häufig stört.

Von den Gebieten, die ursprünglich ebenfalls behandelt werden sollten, konnte der ganze Abschnitt über Kombinationstöne, Va-

riationstöne usw. wegfallen, da in dem inzwischen erschienenen Buche von E. Waetzmann „Die Resonanztheorie des Hörens" dies Gebiet eine ziemlich ausführliche, dem heutigen Stand der Forschung entsprechende Darstellung erfahren hat. Leider aber mußten wegen Raummangels auch andere Teile weggelassen werden, z. B. die Theorie der Schwingungen von Stäben mit veränderlichem Querschnitt, die Theorie der Resonatoren sowohl nach Helmholtz als auch nach Kirchhoff und Lord Rayleigh und manches andere. Da das Buch aber kein Lehrbuch oder umfassendes Handbuch sein soll, so hoffe ich, daß es trotz dieser Lücken seinen Zweck erfüllen und eine gute Aufnahme finden wird.

Der Verlagsbuchhandlung gebührt für die schnelle Drucklegung des umfangreicher als geplant ausgefallenen Werkes und seine reiche Ausstattung mit Figuren der Dank des Verfassers.

Oliva bei Danzig, Juli 1913. A. KALÄHNE.

LITERATURVERZEICHNIS.

1. Lord Rayleigh, Theory of Sound. 2 Bde. 2nd ed. 1894 und 96 London; 1. Aufl. deutsch von Neesen. Braunschweig 1880.
2. H. v. Helmholtz, Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik. 5. Ausgabe. Braunschweig 1906.
3. W. C. L. van Schaik, Wellenlehre und Schall. Braunschweig 1902 (deutsche Ausgabe von Fenkner).
4. Handbuch der Physik (herausg. von Winkelmann) Band II (Akustik) bearb. von F. Auerbach. Leipzig 1909.
5. H. Starke, Physikalische Musiklehre. Leipzig 1908.
6. E. H. Barton, Text-Book on Sound. London 1908.
7. J. Tyndall, Der Schall. Deutsche Bearbeitung von A. v. Helmholtz und Cl. Wiedemann. 3. Aufl. Braunschweig 1897.
8. K. L. Schaefer, Musikalische Akustik. Leipzig 1902 (Sammlung Göschen). Mit umfangreichem Literaturverzeichnis.
9. L. A. Zellner, Vorträge über Akustik. Wien und Leipzig 1892.
10. Jonquière, Grundriß der musikalischen Akustik. Leipzig 1898.
11. F. Melde, Akustik. Leipzig 1883.
12. G. B. Airy, On Sound and Atmospheric Vibrations. London 1871. 2nd ed.
13. E. F. F. Chladni, Die Akustik. Leipzig 1802.
14. Derselbe, Neue Beiträge zur Akustik. Leipzig 1817.
15. H. Lamb, The Dynamical Theory of Sound. London 1910.
16. Derselbe, Schwingungen elastischer Körper, insbesondere Akustik; in Enzyklopädie d. math. Wissenschaften, IV. Band (Mechanik). Art. 26. Leipzig 1907.
17. E. Waetzmann, Die Resonanztheorie des Hörens. Braunschweig 1912.
18. H. v. Helmholtz, Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden. Leipzig 1896 (Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 80).

INHALTSVERZEICHNIS.

I. Abschnitt.

Grundlagen aus der Elastizitätstheorie.

1. Kapitel.

Kinematik der elastischen Körper.

2. Kapitel.

Dynamik der elastischen Körper. Kräfte, Bewegungsgleichungen und Elastizitätskonstanten.

Nr. Seite

II. Abschnitt.

Elementare Theorie der von einer einzigen Koordinate abhängigen Schwingungen und Wellen in kontinuierlichen Medien. Eindimensionale Probleme.

3. Kapitel.

Eigenschwingungen vom Typus der Saitenschwingungen bei festen Körpern.

4. Kapitel.

Eigenschwingungen zylindrischer u. konischer Gassäulen (Pfeifen). Ebene und kugelförmige Wellen.

5. Kapitel.

Transversal- oder Biegungsschwingungen von Stäben.

Nr. Seite

III. Abschnitt.

Theorie der von zwei Raumkoordinaten abhängigen Schwingungen. Eigenschwingungen von Membranen und Platten.

6. Kapitel.

Eigenschwingungen von Membranen.

7. Kapitel.

Eigenschwingungen von Platten.

Nr. Seite

IV. Abschnitt.

Vervollkommnete Theorie für offene gasgefüllte Hohlräume.

8. Kapitel.

Helmholtzsche Theorie der offenen Pfeifen und kubischen Resonatoren.

DRUCKFEHLER-BERICHTIGUNG.

In **Band I** muß es heißen:

Auf Seite 22, Z. 12 v. o. $cg_1 g_2$ statt $cc_1 g_2$.

" " 51, Z. 1 v. o. $\frac{D'' a^4}{4}$ statt $\frac{D'' a^4}{3}$.

" " 54, Z. 2 v. o. (32) statt (33).

" " 57, in den Kolumnenköpfen der Tabelle muß es heißen (37a) statt (38a).

" " 58, Z. 12 v. o. (37) statt (39).

" " 74, Z. 4. v. o. und in Gleichung (10) ist zu setzen θ statt ϑ.

" " 89, Z. 10 v. o. „... so steigt J von $\frac{M\varkappa^2 A^2}{2n^4}$ ..." statt „... so steigt J von Null ...".

" " 107, Z. 11 v. o. in Gleichung (9) ψ_1 bezw. ψ_2 usw. statt Ψ_1 bezw. Ψ_2 usw.

" " 108, Z. 1. v. u hinter den Worten Koppelungskoeffizient ist einzuschalten: „oder Koppelungsparameter".

" " 119, hinter Gleichung (35) ist einzuschalten: „Die Dämpfung beider Schwingungen ist dieselbe, nämlich gleich derjenigen der ungekoppelten Schwingungen δ".

In **Band II** muß es heißen:

Auf Seite 90, in Gleichung (28), (29) und in Fußnote 2) $-\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ statt $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$.

" " 91, Z. 2 v. u. $-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$ statt $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$.

" " 91, in Gleichung (30) $-\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ statt $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$.

" " 91, in Gleichung (31) ist als untere Integrationsgrenze p_0 statt $\bar{p}$ zu setzen und einzufügen: „p_0 ist ein beliebiger als Normalwert gewählter Druck".

" " 96, in Gleichung (41) und (42) ist $-u_r$ statt u_r und $-u_r$ statt u_r zu setzen, oder es sind die Vorzeichen der rechten Seiten umzukehren.

Auf Seite 202, Z. 20 v. o. das Wort „stehende" ist zu streichen.

" " 204, Z. 1 v. o. „... stationäre Wellen von einer noch unbekannten Zwischenform" statt „... stehende Wellen".

" " 206, Z. 3 v. o. $\Psi = \Psi^* \cos 2\pi N t + \Psi^{**} \sin 2\pi N t$ statt $\Psi = \Psi$.

" " 213, Z. 1 und 13 v. o. das Wort „stehende" ist zu streichen.

" " 213, Z. 4 v. o. „einfache stehende Sinusform" statt „einfache Sinusform".

" " 217, Z. 10 v. o. hinter „Minima" ist einzuschalten: „d. h. die Werte Null".

" " 217, Z. 14 und 15 v. o. „... dagegen einen besonders kleinen Wert ..." statt „... ein Minimum nimmt einen besonders kleinen Wert an ...".

" " 217, Z. 21 v. o. hinter „Maxima und Minima" ist „(Extremwerte)" einzuschalten.

I. Abschnitt.

Grundlagen aus der Elastizitätstheorie.

1. Kapitel.

Kinematik der elastischen Körper.

1. Allgemeine und lineare (homogene) Deformation. Die Schwingungen, welche man als Schall wahrnimmt, verdanken ihren Ursprung den elastischen Eigenschaften der Körper; ihre Form und ihre Ausbreitung als Wellen wird durch sie bedingt. Zum Verständnis ihrer Theorie ist die Kenntnis der Grundlagen der Elastizitätslehre und Hydrodynamik erforderlich. Diese Kenntnis wird vorausgesetzt. Die wichtigsten Beziehungen und Formeln derselben sind in diesem einleitenden Abschnitt zusammengestellt, zum Teil ohne Beweis.

Es wird angenommen, daß die Materie den Raum stetig (kontinuierlich) erfüllt. Irgendeine Lageänderung der Massenteilchen (Punkte) des betrachteten Körpers heißt Deformation im weitesten Sinne. Dazu gehören als spezielle Fälle auch reine Lageänderungen, die der Körper als Ganzes, als starrer Körper, erfährt, also Translation (Verschiebung) und Rotation (Drehung) ohne Formänderung. Die allgemeinste Deformation setzt sich aus diesen beiden und aus Volumen- und Formänderungen zusammen, bei denen sich die relativen Lagen und Entfernungen der Massenpunkte gegeneinander ändern. Für die akustischen Schwingungen kommen im wesentlichen nur die Form- und Volumenänderungen in Betracht, die man unter dem Namen Formänderung zusammenfassen kann.

Ein Massenpunkt m des Körpers, den man sich etwa als Schwerpunkt oder Mittelpunkt eines Raumelementes des Körpers zu denken hat, habe, auf ein rechtwinkliges kartesisches Koordinatensystem x, y, z bezogen, vor der Deformation die Koordinaten x, y, z, nach der Deformation die Koordinaten x', y', z'. Diese letzteren sind offenbar Funktionen der Koordinaten x, y, z desselben Massen-

punktes vor der Deformation, also Funktionen von x, y, z, sodaß man etwa setzen kann

$$x' = \varphi(x, y, z); \quad y' = \chi(x, y, z); \quad z' = \psi(x, y, z). \tag{1}$$

Die Funktionen φ, χ, ψ hängen natürlich bei Bewegungsvorgängen auch noch von der Zeit ab; sie können im übrigen ganz beliebige Form haben, wenn sie nur stetig sind. Eine ganz spezielle, theoretisch wichtige Deformation erhält man, wenn φ, χ, ψ lineare Funktionen von x, y, z sind, nämlich die *lineare oder homogene Deformation*

$$\left\{\begin{aligned} x' &= a_1 x + a_2 y + a_3 z = (1 + e_x)x + a_2 y + a_3 z \\ y' &= b_1 x + b_2 y + b_3 z = b_1 x + (1 + e_y)y + b_3 z \\ z' &= c_1 x + c_2 y + c_3 z = c_1 x + c_2 y + (1 + e_z)z \end{aligned}\right. \tag{2}$$

oder anders geschrieben

$$\left\{\begin{aligned} u_x &= (a_1 - 1)x + a_2 y + a_3 z = e_x x + a_2 y + a_3 z \\ u_y &= b_1 x + (b_2 - 1)y + b_3 z = b_1 x + e_y z + b_3 z \\ u_z &= c_1 x + c_2 y + (c_3 - 1)z = c_1 x + c_2 y + e_z z, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

wenn man die *Verschiebungen (Verrückungen)* der Teilchen einführt

$$u_x = x' - x, \quad u_y = y' - y, \quad u_z = z' - z \tag{4}$$

und

$$a_1 - 1 = e_x, \quad b_2 - 1 = e_y, \quad c_3 - 1 = e_z \tag{5}$$

setzt. Jenachdem x, y, z absolute (auf ein festes Koordinatensystem bezogene) oder relative (auf ein bewegliches System bezogene) Koordinaten sind, sind auch die u_x, u_y, u_z absolute oder relative Verschiebungen.

2. Die unendlich kleine Deformation näherungsweise eine lineare Deformation. Auf diese lineare Deformation reduziert sich die allgemeine Deformation (1) in erster Näherung immer, wenn man nur die nächste Umgebung des Koordinatenanfangspunktes betrachtet[1]). Man kann dann nämlich die Funk-

1) bzw. die nächste Umgebung irgendeines beliebig gewählten Punktes des Körpers, da man jeden Punkt zum Koordinatenanfangspunkt machen kann; x, y, z sind immer die relativen Koordinaten des variablen Punktes, bezogen auf diesen Bezugspunkt.

tionen φ, χ, ψ nach dem Mac Laurinschen bzw. dem Taylorschen Satze in Potenzreihen entwickeln, die nach Potenzen von x, y, z fortschreiten. Vernachlässigt man die quadratischen und höheren Glieder der Reihenentwicklung, so erhält man

$$(6)\qquad \begin{cases} x' = \left(1 + \dfrac{\partial u_x}{\partial x}\right) x + \dfrac{\partial u_x}{\partial y} y + \dfrac{\partial u_x}{\partial z} z \\ y' = \dfrac{\partial u_y}{\partial x} x + \left(1 + \dfrac{\partial u_y}{\partial y}\right) y + \dfrac{\partial u_v}{\partial z} z \\ z' = \dfrac{\partial u_z}{\partial x} x + \dfrac{\partial u_z}{\partial y} y + \left(1 + \dfrac{\partial u_z}{\partial z}\right) z \end{cases}$$

bzw.

$$(7)\qquad \begin{cases} u_x = x' - x = \dfrac{\partial u_x}{\partial x} x + \dfrac{\partial u_x}{\partial y} y + \dfrac{\partial u_x}{\partial z} z \\ u_y = y' - y = \dfrac{\partial u_y}{\partial x} x + \dfrac{\partial u_y}{\partial y} y + \dfrac{\partial u_y}{\partial z} z \\ u_z = z' - z = \dfrac{\partial u_z}{\partial x} x + \dfrac{\partial u_z}{\partial y} y + \dfrac{\partial u_z}{\partial z} z, \end{cases}$$

indem man die Differentialquotienten $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$ usw. durch die mit ihnen gleichbedeutenden $\dfrac{\partial u_x}{\partial x}$ usw. ersetzt.

Durch Vergleichung von (6) bzw. (7) mit (2) bzw. (3) ergibt sich die Bedeutung dieser Differentialquotienten der Verschiebungen. Sie sind die Dehnungs- und Scherungskoeffizienten

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u_x}{\partial x} = a_1 - 1 = e_x, & \dfrac{\partial u_x}{\partial y} = a_2, & \dfrac{\partial u_x}{\partial z} = a_3 \\ \dfrac{\partial u_y}{\partial x} = b_1, & \dfrac{\partial u_y}{\partial y} = b_2 - 1 = e_y, & \dfrac{\partial u_y}{\partial z} = b_3 \\ \dfrac{\partial u_z}{\partial x} = c_1, & \dfrac{\partial u_z}{\partial y} = c_2, & \dfrac{\partial u_z}{\partial z} = c_3 - 1 = e_z. \end{cases}$$

Die näherungsweise Zurückführung jeder beliebigen Deformation auf die lineare ist nur bei Beschränkung auf unendlich kleine Gebiete in der Umgebung des Bezugspunktes möglich, wobei natürlich auch die Verschiebungen u_x, u_y, u_z selbst unendlich klein bleiben. Diese Beschränkung ist aber für die Elastizitätstheorie kein wesentliches Hindernis, denn erfahrungsgemäß wirken die elastischen Kräfte als Molekularkräfte nur in verschwindend kleinen Entfernungen und hängen ihrerseits auch nur von dem Defor-

mationszustand der unmittelbaren Umgebung ab. Dieser kann aber nach dem Gesagten immer als ein linearer angesehen werden, woraus sich die Wichtigkeit der linearen Deformation für die Theorie ergibt. Der Deformationszustand der ferner gelegenen Teile kommt dabei nicht in Betracht; er kann beliebig sein und ist es bei Bewegungsproblemen, insbesondere bei Schwingungen stets.

3. Zerlegung der linearen Deformation in Dehnungen und Scherungen. Die lineare Deformation (3) bzw. (7) besteht aus neun Einzelgliedern, den drei linearen Dehnungen $u_x = e_x x$, $u_y = e_y y$, $u_z = e_z z$ und den sechs durch die übrigen Glieder dargestellten Scherungen. Diese neun Teildeformationen können natürlich auch einzeln oder in beliebigen Verbindungen vorkommen.

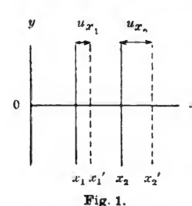


Fig. 1.
Lineare Dehnung. Verschiebung der Ebenen $x = x_1$ und $x = x_2$ um die Strecken $u_{x_1} = e_x x_1$ und $u_{x_2} = e_x x_2$ in der x-Richtung.

Bei einer linearen Dehnung, z. B. $u_x = e_x x$, werden alle zu der betreffenden Koordinatenachse senkrechten Ebenen des Körpers parallel mit sich selbst verschoben und dabei voneinander entfernt (positive Dehnung) oder einander genähert (negative Dehnung, Kontraktion). In Fig. 1 ist diese Verschiebung für die Ebenen $x = x_1$ und $x = x_2$ dargestellt.

Bei einer der sechs einfachen Scherungen, die durch eins der übrigen sechs Glieder von (3) dargestellt werden, werden die zu einer Koordinatenachse senkrechten Ebenen auch parallel mit sich selbst verschoben, aber nicht in Richtung jener Achse, sondern senkrecht dazu; d. h. sie verschieben sich in ihrer eigenen Ebene, benachbarte Ebenen gleiten aneinander entlang. Z. B. stellt $u_x = a_2 y$ eine Scherung dar, bei der alle zur y-Achse senkrechten Ebenen sich in sich selbst um gewisse Strecken in der x-Richtung verschieben, die proportional dem Abstand von der xz-Ebene wachsen. In Fig. 2 ist diese Scherung dargestellt. Die vorher auf der y-Achse gelegenen Punkte $y_1, y_2 \ldots$ liegen nachher auf der Geraden x_1', $x_2' \ldots$, die mit der y-Achse einen Winkel δ, den Scherungswinkel, einschließt. Dieser gibt den Betrag der Scherung an; seine trigonometrische Tangente ist gleich dem betreffenden Scherungskoeffizienten, hier also z. B. $\operatorname{tg} \delta = a_2 = \frac{u_x}{y}$. Bei unendlich kleiner Scherung gilt $\delta = a_2$ usw. Außer dieser einfachen Sche-

rung kann man die aus zwei speziellen einfachen Scherungen zusammengesetzte Doppelscherung betrachten, die physikalisch in mancher Hinsicht einfacher ist.

Fig. 2. Lineare einfache Scherung. Verschiebung der Ebenen $y = y_1$, $y = y_2$ usw. um die Strecken $u_1 = a_2 y_1$, $u_2 = a_2 y_2$ usw. in der x-Richtung. Scherungswinkel δ.

4. Die räumliche Dehnung (Dilatation). Die drei linearen Dehnungen $u_x = e_x x$, $u_y = e_y y$, $u_z = e_z z$ in Richtung der Koordinatenachsen ohne Scherungsglieder geben zusammen eine räumliche Dehnung oder Dilatation. Diese zeichnet sich dadurch aus, daß alle auf drei gewissen Achsen, den Hauptdehnungsachsen oder Dilatationsachsen gelegenen Teilchen keine Scherungen sondern nur Dehnungen (Verschiebungen in den Achsenrichtungen) erleiden. Im vorliegenden Fall sind die drei Koordinatenachsen diese Hauptdehnungsachsen und die Hauptdehnungen haben die Beträge e_x, e_y, e_z.

Ein Würfel mit der Kantenlänge 1, dessen Kanten den Hauptdehnungsachsen parallel sind, wird dabei in ein rechtwinkliges Parallelepiped mit den Kanten $1 + e_x$, $1 + e_y$, $1 + e_z$ umgeformt. Die räumliche Dilatation, d. h. die Volumenzunahme der Volumeneinheit, oder, anders ausgedrückt, die Volumenzunahme dividiert durch das ursprüngliche Volumen ist also[1])

$$D = (1 + e_x)(1 + e_y)(1 + e_z) - 1. \tag{9}$$

Für unendlich kleine Dehnungen e_x, e_y, e_z geht dies über in

$$D = e_x + e_y + e_z, \tag{9a}$$

indem die beim Ausmultiplizieren der Klammern auftretenden Produkte der e_x, e_y, e_z als unendlich kleine Größen höherer Ordnung wegfallen.

Durch Einführung der Differentialquotienten der Verschiebungen für e_x, e_y, e_z aus (8) in (9a) erhält man die bekannte Formel

$$D = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \operatorname{div} u, \tag{9b}$$

indem man den Verschiebungsvektor, dessen Komponenten in den x,

1) Die Gleichungen (9), (9a), (9b) gelten allgemein auch dann, wenn e_x, e_y, e_z nicht die Hauptdehnungen sind. Denn Scherungen und Drehungen, die durch die übrigen Koeffizienten dargestellt werden, erfolgen ohne Volumenänderung.

y, z-Richtungen u_x, u_y, u_z sind, mit u bezeichnet und die bekannte Rechenoperation „Divergenz" der Vektorrechnung benutzt.[1])

5. Zerlegung der unendlich kleinen Deformation in Translation, Rotation und räumliche Dehnung. Superposition. Man kann die lineare Deformation (3) bezw. (7) statt in 3 Dehnungen und 6 einfache Scherungen auch anders zerlegen, nämlich in eine Rotation (Drehung des starr gedachten Körpers um einen seiner Punkte) und eine räumliche Dehnung (Dilatation) des Körpers nach drei aufeinander senkrechten Achsen. Die außerdem bei der allgemeinen Deformation noch hinzukommende Translation ist bei der Form (3) und (7) der Deformation schon weggefallen. Die Lage der Drehungs-, und der Dehnungsachsen, sowie die Beträge der Drehungen und Dehnungen lassen sich aus den Koeffizienten von (3) bezw. (7) berechnen. Für endliche Deformationen werden aber die Ausdrücke recht umständlich, sie vereinfachen sich jedoch bei unendlich kleinen Deformationen. Die folgenden Gleichungen gelten im allgemeinen nur für unendlich kleine Deformationen.

Die allgemeine lineare Deformation (3) bezw. (7) — ohne Translation — geht in eine bloße Rotation über, wenn zwischen den Koeffizienten a_1, a_2 ... gewisse Beziehungen bestehen, nämlich wenn sie sich in der Form darstellen läßt

$$(10) \qquad \begin{cases} u_x^{(r)} = x_r' - x = \qquad\qquad - \Theta_z y + \Theta_y z \\ u_y^{(r)} = y_r' - y = \Theta_z x \qquad\qquad - \Theta_x z \\ u_z^{(r)} = z_r' - z = - \Theta_y x + \Theta_x y \end{cases}$$

Der Index r bedeutet, daß die Verschiebungen Rotationen sind. Θ_x, Θ_y, Θ_z sind die unendlich kleinen Drehungswinkel um die drei Achsen x, y, z, aus denen sich die Gesamtdrehung

$$\Theta = \sqrt{\Theta_x^2 + \Theta_y^2 + \Theta_z^2}$$

zusammensetzt. Die Richtung der resultierenden Drehungsachse wird durch die drei Richtungskosinusse $\frac{\Theta_x}{\Theta}$, $\frac{\Theta_y}{\Theta}$, $\frac{\Theta_z}{\Theta}$ bestimmt. Die Drehung Θ setzt sich nach denselben Gesetzen wie Geschwindigkeit, Kraft und andere Vektoren aus den Komponenten zusammen, sie ist selbst ein Vektor und zwar ein Wirbelvektor.

Die Gleichungen (3) bezw. (7) bedeuten eine bloße räum-

1) Vgl. v. Ignatowsky, Vektoranalysis; diese Sammlung Bd. VI, 1.

Einige Urteile über die früheren Jahrgänge.

Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften:

„. . . Die erstaunliche Fülle des Stoffes, die hier auf engem Raum, aber sehr übersichtlich zusammengestellt ist, macht das Werk zu einem Nachschlagebuch, das jedem Fachgenossen auf das allerwärmste empfohlen werden kann."

Mathesis, Recueil mathématique:

„. . . Ce précieux recueil . . . est une vraie encyclopédie mathématique et physique, avec des notices très soignées sur des points difficiles, dues à des savants spécialement compétents."

Naturwissenschaftliche Wochenschrift:

„. . . Die Reichhaltigkeit und Vielseitigkeit, die sich schon beim Durchblättern zeigen, und die Gediegenheit des Inhalts, die sich dem eingehenderen Studium erschließt, machen im Verein mit der übersichtlichen Stoffanordnung das Taschenbuch zu einem Orientierungsmittel von großer Verwendbarkeit und Zuverlässigkeit; jedem Freunde der exakten Wissenschaften kann daher die Anschaffung des vorzüglichen Buches angelegentlich empfohlen werden."

Naturwissenschaftliche Rundschau:

„. . . Das Taschenbuch füllt eine schon oft empfundene Lücke aus, indem es zum ersten Male nach dem Muster anderer Wissenschaften die für Mathematiker und Physiker wichtigen Daten zusammenstellt. Diesen sind auch noch Angaben aus der Astronomie und Chemie hinzugefügt."

Zeitschrift für Versicherungswesen:

„. . . Die Einleitung des Taschenbuches bildet eine feinsinnige Würdigung der Lebensarbeit des großen, leider so früh verstorbenen Mathematikers Minkowski. Einzelne flott geschriebene Artikel von Fachleuten über Bahnbestimmung der Kometen und Planeten, über Mengenlehre, Zahlentheorie, Integralgleichungen, Nichteuklidische Geometrie, Versicherungsmathematik, Relativitätstheorie, Radioaktivität usw. können einen Leser schon sehr gut über die neuesten Entwicklungen in diesen Gebieten orientieren. Die Aufnahme solcher Artikel in einem Taschenbuch ist sehr zu begrüßen und wird seine Beliebtheit steigern. Eine wirkliche Bereicherung stellt auch die Aufnahme der Elektrotechnik dar. Man kann nur wünschen, daß das Taschenbuch zu einem festen Bestandteil unserer periodischen Literatur werde. Wer sich damit vertraut gemacht hat, wird immer wieder überrascht sein von seiner Reichhaltigkeit und Zweckmäßigheit und wird es nicht mehr missen wollen."

Aus der Vorrede zum zweiten Jahrgange 1911.

Die bei der ersten Herausgabe dieses Werkes geäußerte Annahme, es komme einem dringend empfundenen Bedürfnisse entgegen, hat bei Publikum und Kritik eine volle Bestätigung gefunden, und das Buch hat sich als praktisches Hilfsmittel bei Mathematikern, Physikern und Angehörigen verwandter Gebiete rasch verbreitet. Es ist das um so freudiger zu begrüßen, als, wie schon damals betont wurde, ein erster Jahrgang eines derartigen Unternehmens naturgemäß noch ein sehr unvollkommenes Bild dessen gibt, was beabsichtigt und erstrebt wird. Um so eifriger wird nunmehr das Bestreben aller Beteiligten sein, das Buch nach und nach auf die Höhe und zu der Vielseitigkeit zu bringen, auf die seine Benutzer Anspruch erheben dürfen.

Es hatte sich die Notwendigkeit herausgestellt, daß in die Redaktion ein zweiter, mathematischer Herausgeber (Herr Prof. Dr. Rothe) eintrat, der dann eine völlige Neubearbeitung des mathematischen Teiles in die Wege leitete.

Aus der Vorrede zum dritten Jahrgange 1913.

Der vorliegende dritte Jahrgang des Taschenbuches für Mathematiker und Physiker enthält wieder mehrere neue Beiträge, und auch die Hauptabschnitte sind unter Weglassung manches älteren durch neue Einfügungen bereichert worden. Die diesmaligen Beiträge sind folgende: Friedrich Kohlrausch (Biographie), von E. Warburg. — Kalender und Astronomie, von O. Knopf. — Mengenlehre, von G. Hessenberg. — Gruppentheorie und Galoissche Theorie der Gleichungen, von L. Bieberbach. — Der letzte Fermatsche Satz, von Albert Fleck. — Integralgleichungen und deren Anwendungen, von O. Toeplitz. — Mehrdeutige Funktionen und Uniformisierung, von L. Bieberbach. — Die Internationale Mathematische Unterrichtskommission, von W. Lietzmann. — Analytische Mechanik, von H. Liebmann. — Die Quantentheorie, von A. Sommerfeld. — Niedere Geodäsie, von P. Gast. — Kristallographie, von L. Milch. — Allgemeine Chemie, von Fr. Auerbach.

Alles übrige ist, soweit mathematisch, von Rudolf Rothe, soweit physikalisch, von Felix Auerbach, soweit literarisch oder personell, von beiden gemeinschaftlich bearbeitet worden. Unter den neuen Beiträgen findet sich diesmal auch eine historische Liste der bedeutenden Mathematiker; eine entsprechende Liste der Physiker soll das nächste Mal folgen.

In das Inhaltsverzeichnis sind diesmal auch die selbständigen Beiträge aus den früheren Jahrgängen, in Klammern gesetzt, aufgenommen; ebenso enthält das Register, wie schon im zweiten Jahrgange, auch die Stichworte früher behandelter Themen.

Inhalt.

liche **Dehnung**, wenn sie die Form annehmen:

$$(11)\quad \begin{cases} u_x^{(d)} = x_d' - x = e_x x + s_z y + s_y z \\ u_y^{(d)} = y_d' - y = s_z x + e_y y + s_x z \\ u_z^{(d)} = z_d' - z = s_y x + s_x y + e_z z. \end{cases}$$

Sie lassen sich nämlich, wenn die hieraus leicht erkennbaren Beziehungen zwischen den Koeffizienten der einzelnen Scherungsglieder bestehen, durch eine einfache Koordinatentransformation, und zwar eine bloße Drehung des Achsenkreuzes x, y, z in gewisse neue Richtungen ξ, η, ζ, auf die einfache Form ohne Scherungsglieder zurückführen

$$(12)\quad u_\xi = \xi_d' - \xi = \varepsilon_\xi \xi, \quad u_\eta = \eta_d' - \eta = \varepsilon_\eta \eta, \quad u_\zeta = \zeta_d' - \zeta = \varepsilon_\zeta \zeta.$$

Den Beweis für die angegebene Umformung findet man in den Lehrbüchern der Elastizitätstheorie und ähnlichen Werken[1]). Die Gleichungen (11) und (12) gelten übrigens nicht nur für unendlich kleine, sondern auch für endliche Deformationen, während die Rotationsgleichungen (10) nur für unendlich kleine Deformationen gelten.

Lagert man eine unendlich kleine Drehung nach (10) und eine Dehnung nach (11) bezw. (12) übereinander, d. h. unterwirft man den Körper beiden Deformationen nacheinander, indem man ihn erst die Drehungen $u_x^{(r)}$, $u_y^{(r)}$, $u_z^{(r)}$ und dann von den so erreichten Koordinaten aus die Dehnungen $u_x^{(d)}$, $u_y^{(d)}$, $u_z^{(d)}$ ausführen läßt, so erhält man als resultierende Deformation die allgemeine (unendlich kleine) lineare Deformation (3) bezw. (7). Die Reihenfolge Drehung-Dehnung kann dabei ohne Änderung des Resultates umgekehrt werden. Dieses einfache **Superpositionsprinzip** gilt aber nur bei unendlich kleinen Verrückungen.

Durch Vergleichung der Koeffizienten der allgemeinen Form (3) bezw. (7) mit der durch diese Superposition entstandenen Form der Deformationsgleichungen erhält man die Beziehungen

$$(13)\quad \begin{cases} \frac{\partial u_x}{\partial x} = a_1 - 1 = e_x, & \frac{\partial u_x}{\partial y} = a_2 = s_z - \Theta_z, & \frac{\partial u_x}{\partial z} = a_3 = s_y + \Theta_y, \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} = b_1 = s_z + \Theta_z, & \frac{\partial u_y}{\partial y} = b_2 - 1 = e_y, & \frac{\partial u_y}{\partial z} = b_3 = s_x - \Theta_x, \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} = c_1 = s_y - \Theta_y, & \frac{\partial u_z}{\partial y} = c_2 = s_x + \Theta_x, & \frac{\partial u_z}{\partial z} = c_3 - 1 = e_z. \end{cases}$$

1) Vgl. z. B. auch H. Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der math. Physik II § 60 ff.

Daraus ergeben sich umgekehrt die Drehungs-, Dehnungs- und Scherungskoeffizienten als Funktionen der Koeffizienten der allgemeinen Form (3) bezw. (7)

$$
(14) \quad \begin{cases}
\Theta_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) = \frac{1}{2}(c_2 - b_3); \quad e_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = a_1 - 1; \\
\qquad s_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) = \frac{1}{2}(c_2 + b_3) \\
\Theta_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}(a_3 - c_1); \quad e_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} = b_2 - 1; \\
\qquad s_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}(a_3 + c_1) \\
\Theta_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}(b_1 - a_2); \quad e_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} = c_3 - 1; \\
\qquad s_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}(b_1 + a_2).
\end{cases}
$$

In der Bezeichnungsweise der Vektorrechnung sind $2\Theta_x$, $2\Theta_y$, $2\Theta_z$ die Komponenten des als „Rotation des Vektors u“ bezeichneten neuen Vektors $2\Theta = \operatorname{rot} u$, also

$$
(15) \qquad \Theta_x = \frac{1}{2}\operatorname{rot}_x u, \quad \Theta_y = \frac{1}{2}\operatorname{rot}_y u, \quad \Theta_z = \frac{1}{2}\operatorname{rot}_z u.
$$

Übrigens kommen die starren Rotationen für die Akustik nicht in Betracht.

2. Kapitel.

Dynamik der elastischen Körper. Kräfte, Bewegungsgleichungen und Elastizitätskonstanten.

6. Deformierende Kräfte und elastische Reaktionskräfte. Bei der linearen — sowohl der endlichen als auch der unendlich kleinen — Deformation wird nach Nr. 3 jede Ebene bezw. jedes ebene Flächenelement in dem Körper sowohl in Richtung ihrer Normalen, d. h. senkrecht zu sich selbst, als auch in ihrer eigenen Ebene d. h. parallel verschoben. Diese Verschiebungen werden von den deformierenden Kräften bewirkt, die senkrechte von der Normalkraft (Druck bezw. Zugkraft), die parallele von der Tangentialkraft oder Scherungskraft (Schubkraft). Die Normalkraft wirkt senkrecht zu dem Flächenelement $d\omega$, die Tangentialkraft in der Ebene von $d\omega$. Beide zusammen ergeben die

resultierende Kraft, die im allgemeinen schief gegen das Flächenelement gerichtet ist. Nur wenn keine scherenden Kräfte vorhanden sind, wie es bei idealen reibungslosen Flüssigkeiten und Gasen immer der Fall ist, reduziert sich die resultierende Kraft auf eine stets senkrecht wirkende Druckkraft.

Der Ausdruck „Kraft, welche auf eine Fläche bezw. ein Flächenelement wirkt" bedeutet, daß diese Kraft auf ein mit Masse erfülltes Raumteilchen (Volumenelement) des Körpers, dessen Begrenzung ganz oder zum Teil von jenem Flächenelement gebildet wird, durch Vermittlung dieses Flächenelementes von dem benachbarten Raumteilchen ausgeübt wird. Denkt man sich den Angriffspunkt dieser Kraft aus dem Raumteilchen an seine Oberfläche, also an das Flächenelement verlegt, so erhält man die als Flächenkraft bezeichnete Kraft, von der hier die Rede ist.

Ein aus dem elastischen Körper beliebig herausgeschnittenes Raumgebiet unterliegt an jedem seiner Oberflächenelemente einer Einwirkung des angrenzenden Außengebietes, welche man durch die aus Normal- und Tangentialkraft resultierende Kraft $\mathfrak{K}_n d\omega$ darstellt. Der Index n deutet die Normalenrichtung des Oberflächenstückes $d\omega$ an, auf welches die Kraft wirkt, und zwar soll n im allgemeinen die nach dem Inneren des betrachteten Raumgebietes weisende Normale sein.

Die gleiche Kraft, welche die Umgebung auf das betrachtete Raumelement ausübt, übt dieses rückwärts in entgegengesetzter Richtung als Reaktion auf die Umgebung aus. Beide Wechselwirkungskräfte zusammen ergeben den elastischen Spannungszustand in dem Körper. Dieser variiert im allgemeinen von Punkt zu Punkt nach Größe und Richtung.

7. Elastischer Spannungszustand. Tensortripel und Hauptdrücke. Genau so wie eine Kraft als eine gerichtete Größe durch eine in der Richtung derselben nach dem Angriffspunkt hin- oder von ihm fortzielende Strecke dargestellt wird, kann diese Wechselwirkung, die Spannung, ebenfalls eine gerichtete Größe, durch zwei gleich große in entgegengesetzter Richtung von dem Angriffspunkt, dem Flächenelement $d\omega$, fort- oder zu ihm hinweisende Strecken dargestellt werden. Die Kraft ist ein Vektor, die Spannung ein Bivektor oder Tensor. Größe und Richtung der den Tensor darstellenden Doppelstrecke in jedem Punkt des Raumes gibt Größe und Richtung der dort herrschenden Spannung an. Gegenüber dem durch einen einfachen Vektor darstellbaren

Kraftfeld, z. B. einem elektrischen oder magnetischen Feld, tritt aber bei dem durch Tensoren darzustellenden Spannungsfeld eine Komplikation auf. Der Kraftvektor stellt die Wirkung auf einen Punkt dar und ist an jedem Punkt des Feldes eindeutig als Funktion der Lage dieses Punktes bestimmt; der Zustand ist also an jedem Punkt durch drei Bestimmungsstücke ausdrückbar. Anders bei dem Spannungsfeld. Der Spannungszustand an irgend einem Punkte, d. h. die Wirkung, welcher ein dort befindliches Flächenelement unterliegt, hängt außer von seiner Lage, d. h. vom Orte, noch von der Orientierung des Elementes ab, die durch die Richtung seiner Normale angegeben wird. Bei drei bestimmten, zu einander senkrechten Orientierungen erleidet das Flächenelement nur senkrechten Druck oder Zug, bei allen anderen Orientierungen wirkt der Druck schief gegen das Element, zerfällt also in einen Normaldruck und einen Scherungsdruck. Zur vollen Charakterisierung des Spannungszustandes sind deshalb sechs Bestimmungsstücke nötig, etwa drei Winkel, welche diese ausgezeichneten Richtungen der Flächennormale gegen die Koordinatenachsen festlegen, und die Werte der drei Drücke in diesen Richtungen. Das bedeutet: man kann den Spannungszustand an jedem Punkt für jede Flächenrichtung durch die drei zueinander senkrechten Hauptspannungen (Hauptdrücke) darstellen. Der Spannungszustand ist durch drei Teiltensoren, ein Tensortripel[1]), darstellbar. Die Richtungen der Hauptdrücke sind die Hauptdruckachsen.

Statt von dem Tensor, der Kraft und Gegenkraft zusammenfaßt, kann man auch von der auf ein Flächenelement wirkenden Kraft allein sprechen und mit ihr rechnen, wenn man nur immer eingedenk bleibt, daß stets die gleich große Gegenkraft zugehört. Die Kraft $\mathfrak{K}_n d\omega$ kann man wie jeden Vektor in Komponenten zerlegen und zwar in verschiedener Weise. Anstelle der Kraft $\mathfrak{K}_n d\omega$ betrachten wir gleich die Kraft, welche auf die Flächeneinheit wirkt, d. h. den Druck $\mathfrak{K}_n$. Dieser läßt sich in den Normaldruck (Druckspannung) $\mathfrak{N}_n$ und den Tangentialdruck (Schubspannung) $\mathfrak{T}_n$ zerlegen, welch letzterer auch noch weiter in zwei zueinander senkrechte Schubspannungen $\mathfrak{T}_n'$ und $\mathfrak{T}_n''$ zerlegt werden kann, also z. B.

$$(1) \qquad \mathfrak{K}_n^2 = \mathfrak{N}_n^2 + \mathfrak{T}_n^2 = \mathfrak{N}_n^2 + \mathfrak{T}_n'^2 + \mathfrak{T}_n''^2.$$

Andererseits kann man auch in die drei Komponenten parallel

1) Vgl. hierzu v. Ignatowsky, Vektoranalysis, diese Sammlung Bd. VI, 1 und VI, 2.

den Koordinatenachsen x, y, z zerlegen

(2) $$\mathfrak{K}_n^2 = \mathfrak{X}_n^2 + \mathfrak{Y}_n^2 + \mathfrak{Z}_n^2$$

oder mit Einführung der Richtungskosinusse für die Winkel zwischen den Komponenten und der resultierenden Richtung, nämlich $\cos(x, \mathfrak{K}_n) = \frac{\mathfrak{X}_n}{\mathfrak{K}_n}$ usw.

(3) $$\mathfrak{K}_n = \mathfrak{X}_n \cos(x, \mathfrak{K}_n) + \mathfrak{Y}_n \cos(y, \mathfrak{K}_n) + \mathfrak{Z}_n \cos(z, \mathfrak{K}_n).$$

8. Die Tensorkomponenten und Bewegungsgleichungen. Nun wird in der Elastizitätstheorie gezeigt, daß sich jeder dieser drei Drücke $\mathfrak{X}_n$, $\mathfrak{Y}_n$, $\mathfrak{Z}_n$ als Resultierende von je drei Komponenten $\mathfrak{X}_x$, $\mathfrak{X}_y$, $\mathfrak{X}_z$; $\mathfrak{Y}_x$, $\mathfrak{Y}_y$, $\mathfrak{Y}_z$; $\mathfrak{Z}_x$, $\mathfrak{Z}_y$, $\mathfrak{Z}_z$ darstellen läßt, die zusammen die neun bzw. sechs (vgl. unten) Komponenten des Tensors $\mathfrak{K}$, der elastischen Spannung sind. Es sind das die Druck- und Schubspannungen in Richtung der Achsen x, y, z, welche auf senkrecht zu diesen Achsen gelegene Flächenelemente wirken. Die großen Buchstaben geben die Richtung der betreffenden Kraftkomponente (z. B. $\mathfrak{X}$ die Komponente in der x-Richtung), die Indizes geben die Normalenrichtung des Flächenstückes an, auf welches die betreffende Komponente wirkt. Es gelten die Gleichungen

(4) $$\begin{cases} \mathfrak{X}_n = \mathfrak{X}_x \cos(x, n) + \mathfrak{X}_y \cos(y, n) + \mathfrak{X}_z \cos(z, n) \\ \mathfrak{Y}_n = \mathfrak{Y}_x \cos(x, n) + \mathfrak{Y}_y \cos(y, n) + \mathfrak{Y}_z \cos(z, n) \\ \mathfrak{Z}_n = \mathfrak{Z}_x \cos(x, n) + \mathfrak{Z}_y \cos(y, n) + \mathfrak{Z}_z \cos(z, n). \end{cases}$$

Aus einer weiteren dynamischen Betrachtung folgt noch die Einschränkung, daß die Schubspannungen paarweis gleich sein müssen, also

(5) $$\mathfrak{Y}_x = \mathfrak{X}_y, \quad \mathfrak{Z}_y = \mathfrak{Y}_z, \quad \mathfrak{X}_z = \mathfrak{Z}_x,$$

wodurch die Zahl der Komponenten von neun auf sechs verringert wird. Der Beweis für die Gleichungen (4) und (5) muß hier wegbleiben. Er folgt daraus, daß im Gleichgewichtszustand sämtliche an einem Körper angreifenden Kräfte sich in allen möglichen Komponentenrichtungen gegenseitig die Wage halten müssen. Das gilt natürlich auch für jedes Raumelement des Körpers. Nimmt man ein parallelepipedisches Raumelement, so führt die Forderung, daß die Drehmomente (resultierenden Kräftepaare) verschwinden müssen, auf die Gl. (5). Die andere Forderung, daß auch die resultierenden Restkräfte verschwinden müssen, bzw. bei Bewegung den beschleunigenden Kräften (Masse mal Beschleunigung) gleich

sein müssen, gibt die drei Differentialgleichungen der Bewegung, kurz Bewegungsgleichungen genannt,

$$(6)\qquad \begin{cases} \varrho \dfrac{d\mathfrak{u}_x}{dt} = \mathfrak{X}' - \left(\dfrac{\partial \mathfrak{X}_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathfrak{X}_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathfrak{X}_z}{\partial z}\right) \\ \varrho \dfrac{d\mathfrak{u}_y}{dt} = \mathfrak{Y}' - \left(\dfrac{\partial \mathfrak{Y}_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathfrak{Y}_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathfrak{Y}_z}{\partial z}\right) \\ \varrho \dfrac{d\mathfrak{u}_z}{dt} = \mathfrak{Z}' - \left(\dfrac{\partial \mathfrak{Z}_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathfrak{Z}_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathfrak{Z}_z}{\partial z}\right), \end{cases}$$

wobei noch mit $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{Z}'$ die Komponenten etwaiger Volumenkräfte bezeichnet sind, z. B. Gravitation, die auf die Masse des Raumelementes als Fernwirkungskräfte wirken; ϱ ist die Dichte, $\mathfrak{u}_x$, $\mathfrak{u}_y$, $\mathfrak{u}_z$ sind die Geschwindigkeitskomponenten des Raumelementes.

9. Die elastischen Kräfte als lineare Funktionen der Verrückungen. Formänderungsarbeit. Um die Bewegungsgleichungen (6) anwenden zu können, muß man die Kräfte als Ortsfunktionen kennen. Die Volumenkräfte $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{Z}'$ müssen direkt als Funktionen der Koordinaten gegeben sein. Die elastischen Flächenkräfte, welche auf das Raumelement $d\tau$ von der Umgebung ausgeübt werden, hängen vom Deformationszustand ab. Der Spannungszustand muß also als Funktion des Deformationszustandes gegeben sein, und es gilt daher, die Form dieser, die Abhängigkeit vermittelnden Funktion für beliebige Körper zu finden. Diese Aufgabe wird für verschwindend kleine Deformationen durch das Hookesche Gesetz gelöst, nach welchem die erzeugte Deformation der wirkenden Kraft direkt proportional ist. Daher ist auch umgekehrt die infolge Deformation entstehende Reaktionskraft, die elastische Spannung, der Deformation direkt proportional. Dies Gesetz ist für gewisse einfache Fälle von Deformationen experimentell bestätigt und wird verallgemeinernd auf alle unendlich kleinen Deformationen angewandt. Da diese letzteren aber in erster Näherung immer als lineare angesehen werden können, so ergibt sich daraus die Wichtigkeit der linearen Deformation für die Theorie. Von der Gesamtdeformation kommt übrigens hier nur immer die räumliche Dehnung, d. h. die Formänderung in Betracht. Translation und Rotation, bei denen keine Formänderung stattfindet, ergeben keine elastischen Kräfte.

Nach dem Hookeschen Gesetz sind die Spannungen lineare

Funktionen der sechs Deformationsparameter[1]) (linearen Dehnungen und Scherungen) $e_x, e_y, e_z, s_x, s_y, s_z$, die sich nach (14) in Nr. 5 auch durch die Differentialquotienten der Komponenten u_x, u_y, u_z der unendlich kleinen nichtlinearen Deformation ausdrücken lassen. Aus diesem Gesetz folgt, daß die Arbeit, welche die elastischen Kräfte bei irgend einer Formänderung leisten, bzw. die gegen sie von den äußeren Kräften geleistete Arbeit (Formänderungsarbeit) eine homogene quadratische Funktion der sechs Deformationsparameter ist.

Im allgemeinsten Falle erhält man die sechs Tensorkomponenten $\mathfrak{X}_x, \mathfrak{X}_y \ldots$ als lineare Funktionen von $e_x, e_y \ldots$ mit 21 von einander unabhängigen konstanten Koeffizienten (Elastizitätskonstanten). Dies gilt für Kristalle mit der geringsten möglichen Symmetrie. Je größer die Zahl der Symmetriegrade wird, desto kleiner wird die Zahl der Konstanten, bis sie schließlich im Fall des isotropen homogenen Körpers, der für die Akustik allein in Betracht kommt, auf zwei unabhängige Elastizitätskonstanten herabsinkt. Bezeichnet man diese mit $-\lambda$ und $-\lambda'$, so erhält man für die Spannungskomponenten in isotropen Körpern die Ausdrücke[2])

$$(7)\quad \begin{cases} \mathfrak{X}_x = -\lambda(e_x + e_y + e_z) - 2\lambda' e_x, & \mathfrak{Z}_y = \mathfrak{Y}_z = -2\lambda' s_x \\ \mathfrak{Y}_y = -\lambda(e_x + e_y + e_z) - 2\lambda' e_y, & \mathfrak{X}_z = \mathfrak{Z}_x = -2\lambda' s_y \\ \mathfrak{Z}_z = -\lambda(e_x + e_y + e_z) - 2\lambda' e_z, & \mathfrak{Y}_x = \mathfrak{X}_y = -2\lambda' s_z \end{cases}$$

oder für nichtlineare aber unendlich kleine Deformationen u mit den Komponenten u_x, u_y, u_z

$$(8)\quad \begin{cases} \mathfrak{X}_x = -\lambda \operatorname{div} u - 2\lambda' \dfrac{\partial u_x}{\partial x}, & \mathfrak{Z}_y = \mathfrak{Y}_z = -\lambda'\left(\dfrac{\partial u_y}{\partial z} + \dfrac{\partial u_z}{\partial y}\right) \\ \mathfrak{Y}_y = -\lambda \operatorname{div} u - 2\lambda' \dfrac{\partial u_y}{\partial y}, & \mathfrak{X}_z = \mathfrak{Z}_x = -\lambda'\left(\dfrac{\partial u_z}{\partial x} + \dfrac{\partial u_x}{\partial z}\right) \\ \mathfrak{Z}_z = -\lambda \operatorname{div} u - 2\lambda' \dfrac{\partial u_z}{\partial z}, & \mathfrak{Y}_x = \mathfrak{X}_y = -\lambda'\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial y} + \dfrac{\partial u_y}{\partial x}\right), \end{cases}$$

1) G. Kirchhoff und mit ihm andere Autoren haben dafür die Bezeichnungen x_x, y_y, z_z statt e_x, e_y, e_z und $y_z = z_y, z_x = x_z, x_y = y_x$ statt $2s_x, 2s_y, 2s_z$. Es kommen auch noch andere Bezeichnungen vor.

2) Die negativen Vorzeichen sind gewählt damit λ und λ' selbst positive Größen werden. Die Gl. (7) müssen auf der rechten Seite negative Vorzeichen haben, damit die Spannungen $\mathfrak{X}_x$ usw. den der Deformation entsprechenden Richtungssinn erhalten. Bei positiver Dehnung (Dilatation) müssen die Größen $\mathfrak{X}_x$ usw. negativ werden, bei negativer Dehnung positiv, da sie immer die vorhandene Deformation rückgängig zu machen suchen.

wobei

$$\text{(9)} \qquad \operatorname{div} u = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = e_x + e_y + e_z = D$$

ist (vgl. auch Nr. 4).

Die Gleichungen (7) lassen sich leicht ableiten, wenn man auf die Hauptdrücke p_ξ, p_η, p_ζ zurückgeht. Die Hauptdruckachsen fallen bei isotropen Körpern aus Symmetriegründen mit den Hauptdehnungsachsen ξ, η, ζ (vgl. Nr. 4) zusammen. Die Hauptdrücke können nun als lineare Funktionen der Hauptdehnungen ε_ξ, ε_η, ε_ζ nur folgende Form haben, die hier die allgemeinste mögliche ist,

$$\text{(10)} \qquad p_\xi = -A\varepsilon_\xi - B(\varepsilon_\eta + \varepsilon_\zeta); \quad p_\eta = -A\varepsilon_\eta - B(\varepsilon_\zeta + \varepsilon_\xi); \quad p_\zeta = -A\varepsilon_\zeta - B(\varepsilon_\xi + \varepsilon_\eta).$$

Setzt man

$$\text{(11)} \qquad B = \lambda, \quad A - B = 2\lambda',$$

so läßt sich (10) umformen in

$$\text{(12)} \qquad \begin{cases} p_\xi = -\lambda(\varepsilon_\xi + \varepsilon_\eta + \varepsilon_\zeta) - 2\lambda'\varepsilon_\xi = -\lambda D - 2\lambda'\varepsilon_\xi \\ p_\eta = -\lambda(\varepsilon_\xi + \varepsilon_\eta + \varepsilon_\zeta) - 2\lambda'\varepsilon_\eta = -\lambda D - 2\lambda'\varepsilon_\eta \\ p_\zeta = -\lambda(\varepsilon_\xi + \varepsilon_\eta + \varepsilon_\zeta) - 2\lambda'\varepsilon_\zeta = -\lambda D - 2\lambda'\varepsilon_\zeta. \end{cases}$$

Durch einfache Koordinatentransformation (Drehung des Achsenkreuzes in die Lage x, y, z) erhält man hieraus die Gl. (7).

10. Die Grenzbedingungen für die elastischen Kräfte. Durch die Gleichungen (6) und (7) — eventuell unter Einführung andrer Elastizitätskonstanten (vgl. Nr. 11) — sind die im Innern des elastischen Körpers zu erfüllenden Bedingungen gegeben. Außerdem müssen aber noch die Grenzbedingungen berücksichtigt werden, d. h. die Bedingungen, welche an der Grenzfläche des Körpers gegen andre Körper, also an seiner Oberfläche, gelten. Offenbar müssen zwischen den von außen auf die Oberfläche wirkenden Drücken und den Spannungen im Inneren gewisse Beziehungen bestehen. In der allgemeinsten Form ist die Grenzbedingung nichts anderes als die auch im Inneren geltende Bedingung, daß Wirkung und Gegenwirkung auf jedes Flächenelement einander gleich sein müssen. Ist also $d\omega$ ein Element der Grenzfläche zwischen den Körpern 1 und 2 und ist n_1 die Normale nach dem Innern von 1 hin, so muß sein

$$\text{(13)} \qquad \mathfrak{R}_{n_1}^{(1)} = \mathfrak{R}_{n_1}^{(2)}.$$

Der obere Index bedeutet, daß die Kraft bezw. Spannung im Inneren des betreffenden Körpers unmittelbar an der Grenzfläche gemeint ist. Gl. (13) besagt, daß die resultierenden Drücke an den Grenzflächen stetig sind. Das gilt auch für ihre Komponenten in irgendwelchen Richtungen, z. B. $\bar{\mathfrak{X}}_n$, $\bar{\mathfrak{Y}}_n$, $\bar{\mathfrak{Z}}_n$. Es gilt aber nicht oder braucht wenigstens nicht zu gelten für die Tensorkomponenten $\mathfrak{X}_x$, $\mathfrak{X}_y$, ..., in die man $\mathfrak{X}_n$ usf. weiter zerlegen kann.

Die von außen wirkenden Kräfte müssen gegeben sein. Dann sind die im Körper unmittelbar an der Oberfläche vorhandenen Spannungen bekannt und das Problem ist bestimmt. Vielfach sind übrigens bei akustischen Problemen die äußeren Oberflächenkräfte gleich Null — z. B. bei allen Eigenschwingungsproblemen — wodurch sich die Rechnung vereinfacht.

11. Die Elastizitätskonstanten. Im Geltungsbereich des Hookeschen Gesetzes hängen die Kräfte linear mit den Verrückungen zusammen; sie sind ihnen im einfachsten Falle — wenn nur eine Verrückung in einer Koordinatenrichtung vorhanden ist — proportional. Die Proportionalitätskonstanten in den Gleichungen, welche diese Beziehungen darstellen, sind Materialkonstanten und werden als Elastizitätskonstanten bezeichnet. Je nach der speziellen Form der Deformation, die man wählt, kann man verschiedene Elastizitätskonstanten an einem und demselben Material unterscheiden. Sie sind aber nicht alle voneinander unabhängig. Bei isotropen Körpern gibt es nur zwei unabhängige solcher Konstanten, z. B. die in Nr. 9 eingeführten Größen λ und λ'. Es sind immer soviel, wie es typische, voneinander wesentlich verschiedene Deformationen gibt; das sind bei isotropen Körpern zwei, nämlich Dehnung und Scherung. Danach wäre es scheinbar am einfachsten, als Elastizitätskonstanten die zu einer einfachen linearen Dehnung und einer einfachen Scherung gehörenden Proportionalitätsfaktoren einzuführen. Das macht aber praktische Schwierigkeiten, weil man z. B. eine Deformation, die nur in einer linearen Dehnung ohne gleichzeitige Querkontraktion besteht, nicht durch eine einfache an dem Körper angreifende Kraft verwirklichen kann, sondern dazu ein kompliziertes Kräftesystem braucht. Als praktisch gebrauchte Elastizitätskonstanten oder Elastizitätsmoduln hat man daher solche Proportionalitätsfaktoren eingeführt, welche leicht zu erzeugenden Deformationen entsprechen. Das sind

1. der Dehnungsmodul E (auch Elastizitätsmodul der Dehnung oder Elastizitätsmodul schlechthin, in England Youngscher Modul genannt),
2. der Torsionsmodul F (auch Gestalts-, Gleit-, Scherungs- oder Schiebungsmodul oder auch zweiter Elastizitätsmodul genannt),
3. der Volumenmodul k (Modul der Volumenelastizität, Kompressionsmodul)[1]),
4. die Elastizitätszahl μ (Poissonsche Konstante).[2])

Die gemeinsame Definition der unter 1. bis 3. genannten Moduln ist diese:

Elastizitätsmodul ist das Verhältnis der Beanspruchung (Druck- oder Zugkraft pro Flächeneinheit) zu der durch sie erzeugten spezifischen Deformation der Längeneinheit bezw. Volumeneinheit (linearen Dehnung e, Scherung δ und räumlichen Dilatation D). Der Volumenmodul gilt für die räumliche Dilatation D, die durch einen allseitigen Zug p erzeugt wird. Der Dehnungsmodul E gilt für eine sog. axiale Dehnung e, d. h. eine durch einen Längszug σ bewirkte Dehnung mit gleichzeitiger Kontraktion senkrecht zur Dehnungsrichtung. Der Torsionsmodul F gilt für die einfache oder, was keinen Unterschied ausmacht, für die Doppelscherung δ (vgl. Nr. 3), die durch eine Schubspannung τ erzeugt wird.[3]) In Formeln ausgedrückt ist also

$$k = \frac{p}{D}, \qquad E = \frac{\sigma}{e}, \qquad F = \frac{\tau}{\delta}. \tag{14}$$

Die Elastizitätszahl μ ist das Verhältnis der Querkontraktion zur Längsdehnung bei der axialen Dehnung.

Zwischen den genannten vier Elastizitätskonstanten, sowie zwischen ihnen und den früher eingeführten Konstanten λ und λ' bestehen bestimmte Beziehungen; durch je zwei von ihnen lassen sich immer alle anderen ausdrücken.

---

1) Der reziproke Wert des Kompressionsmoduls k ist die Kompressibilität $K = \frac{1}{k}$.

2) Die hier benutzten Buchstaben E, F, k, μ sind die in Deutschland meist üblichen. Von ausländischen Autoren werden dagegen vielfach andre Bezeichnungen gebraucht, z. B. in England q für E und n für F.

3) Die Bezeichnungen σ und τ für Druck- und Schubspannungen sind die in der Technik häufig gebrauchten.

Einige der wichtigsten Beziehungen sind

$$(15)\quad \begin{cases} \lambda' = F(=n) = \dfrac{E}{2(1+\mu)} \\ \lambda = k - \dfrac{2F}{3} = k - \dfrac{2\lambda'}{3} = \dfrac{F(E-2F)}{3F-E} = \dfrac{2F\mu}{1-2\mu} \\ \qquad = \dfrac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} \\ E = \dfrac{\lambda'(3\lambda+2\lambda')}{\lambda+\lambda'} = \dfrac{9Fk}{F+3k}(=q) \\ k = \dfrac{FE}{9F-3E} = \dfrac{E}{3(1-2\mu)} = \lambda + \dfrac{2\lambda'}{3} = \dfrac{1}{K} \\ \mu = \dfrac{\lambda}{2(\lambda+\lambda')} = \dfrac{3k-2F}{2(3k+F)} = \dfrac{E-2F}{2F}. \end{cases}$$

Die Definitionsgleichungen (14) der Elastizitätsmoduln setzen lineare Deformationen und lineare Abhängigkeit zwischen diesen und den Kräften voraus. Wo diese Voraussetzungen nicht streng erfüllt sind, kann man die Gleichungen (14) doch beibehalten, indem man unendlich kleine Verrückungen betrachtet. Statt D, e, δ nimmt man die unendlich kleinen Zuwächse $dD, de, d\delta$ der Dehnung, Scherung usw. und statt p, σ, τ die Zuwächse $dp, d\sigma, d\tau$ dieser Spannungen. Die Definitionen (14) gelten in dieser neuen Form ganz allgemein.

12. Die isothermen und adiabatischen Elastizitätsmoduln. Bisher sind die Deformationen usw. rein mechanisch ohne Rücksicht auf sonst noch dabei auftretende Änderungen (Abkühlung, Erwärmung u. dergl.) behandelt worden. Solche physikalischen Änderungen des Zustandes treten bei elastischen Deformationen unter Umständen auf; in Betracht kommen übrigens nur thermische Zustandsänderungen. Mit diesen sind auch immer Änderungen der elastischen Konstanten verbunden. Die bei konstanter Temperatur stattfindenden Deformationen sind isotherme Deformationen, die Konstanten also die isothermen Elastizitätsmoduln E_i, F_i, k_i. Diese Größen gelten für langsam verlaufende Deformationen, bei welchen der Wärmeaustausch mit der Umgebung die Temperatur merklich konstant hält, so daß die durch die Deformationsarbeit erzeugte Temperaturänderung nicht zur Geltung kommt. Bei unvollkommenem Wärmeaustausch werden die durch den gleichen Druck erzeugten Deformationen andere, weil die dabei entstandene Temperaturänderung eine rein ther-

mische Deformation (Dehnung bezw. Kontraktion) zu der mechanischen hinzufügt. Am stärksten ist der Unterschied bei gänzlich gehindertem Wärmeaustausch, mit dem natürlich die größte Temperaturänderung verbunden ist, also bei **adiabatischen** Vorgängen. Die zugehörigen Moduln seien E_a, F_a, k_a. Ob der Wärmeaustausch durch eine wärmeundurchlässige Schutzhülle verhindert wird, oder dadurch, daß der Vorgang zu schnell verläuft um eine merkliche Wärmeübertragung durch Leitung oder Strahlung von der Deformationsstelle aus zu gestatten, ist gleichgültig. Bei den akustischen Schwingungen ist das letztere der Fall. Die Verdichtungen und Verdünnungen (bei Longitudinalschwingungen) wechseln an einem und demselben Punkt so schnell, daß die dabei entstehende Erwärmung oder Abkühlung auf die deformierte Stelle selbst beschränkt bleibt.

Die adiabatischen und isothermen Elastizitätsmoduln stehen in einer einfachen aus der mechanischen Wärmetheorie abzuleitenden Beziehung Nach den Gesetzen der Thermodynamik läßt sich die Temperaturänderung dT berechnen, welche eine adiabatisch erfolgende Längen- bezw. Volumendilatation de bezw. dD hervorruft, die ihrerseits durch den Längszug $dP = q\,d\sigma$ bezw. durch den allseitig wirkenden Zug dp erzeugt wird. Es gilt für einen Körper vom Volumen v unter der Wirkung des allseitigen Zuges p, bezw. für einen geraden Stab vom Querschnitt q und der Länge l unter der Wirkung des Längszuges $P = q\sigma$, wenn die Masse beidemale mit m bezeichnet wird

$$(16) \qquad dT = -\frac{T}{m c_p}\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p dp$$

bezw.

$$(17) \qquad dT = -\frac{T}{m c_p}\cdot\left(\frac{\partial l}{\partial T}\right)_P dP = -\frac{T}{m c_p}\left(\frac{\partial l}{\partial T}\right)_\sigma q\,d\sigma.$$

Die Indizes p und P bezw. σ bei den partiellen Differentialquotienten deuten an, daß die betreffende unabhängige Variable p bezw. σ, von welcher Volumen und Länge außer von der Temperatur T noch abhängen[1]), bei der Differentiation konstant zu halten sind;

1) Das Volumen (bezw. im zweiten Fall die Länge) wird bei gegebener Masse des Körpers durch die äußeren Umstände bestimmt, und diese sind hier durch Temperatur und Druck (allgemein durch irgend zwei unabhängige Zustandsgrößen) gegeben. Die Verbindung dieser drei augenfälligen Zustandsgrößen v, T, p bildet die für jeden Körper charakteristische Zustandsgleichung. Durch sie ist eine dieser drei Größen als Funktion der beiden anderen bestimmt.

c_p ist die spezifische Wärme bei konstantem Druck, mc_p also die Wärmekapazität bei konstantem Druck und zwar in mechanischem Maß, als Arbeitsgröße, gemessen.[1])

T ist die absolute Temperatur, also $T = 273^0 + t^0$, wo t vom Eisschmelzpunkt an rechnet. Die Differentialquotienten $\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$ und $\left(\frac{\partial l}{\partial T}\right)_\sigma$ messen die thermische Ausdehnung bei konstantem Druck und lassen sich durch die bekannten thermischen Ausdehnungskoeffizienten ausdrücken, die für eine mit der Temperaturerhöhung proportionale Ausdehnung gelten. Wenn nämlich (bei konstant bleibendem Druck) gilt

$$v = v_0(1 + \alpha t) = v_0(1 + \alpha[T - 273]),$$
$$l = l_0(1 + \beta t) = l_0(1 + \beta[T - 273]),$$

wo α der kubische, β der lineare Ausdehnungskoeffizient, v_0 bezw. l_0 Volumen und Länge bei 0^0 C. und dem gegebenen Druck ist, so wird

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = v_0\alpha, \quad \left(\frac{\partial l}{\partial T}\right)_\sigma = l_0\beta. \tag{18}$$

Die Masse m ist durch das Produkt aus Volumen und Dichte zu ersetzen

$$m = v\varrho = v_0\varrho_0 = lq\varrho = l_0q_0\varrho_0, \tag{19}$$

wo ϱ die Dichte ist, und die Werte mit dem Index 0 für die Temperatur 0^0 C. und den Druck p gelten. Führt man dies in (16) und (17) ein und berücksichtigt, daß

$$d\sigma = E_a\, de_a = E_a \frac{dl}{l}, \quad dp = -k_a\, dD_a = -k_a \frac{dv}{v}\text{[2])} \tag{20}$$

ist, so gehen diese Gleichungen über in

$$dT = -\frac{T\alpha}{\varrho_0 c_p} \cdot k_a\, dD_a = -\frac{T\alpha k_a}{\varrho_0 c_p}\frac{dv}{v}, \tag{16a}$$

$$dT = -\frac{T\beta E_a}{\varrho c_p}\, de_a = -\frac{T\beta E_a}{\varrho c_p}\frac{dl}{l}. \tag{17a}$$

1) Wenn, wie in der Physik üblich, alle Größen in Zentimeter, Gramm und Sekunden gemessen werden (Z.-G.-S.-system), so muß c_p in mechanischen C.-G.-S.-Einheiten, d. h. in Erg angegeben werden. Soll es in Kalorien angegeben werden, so muß rechts im Nenner noch der Faktor $4{,}19 \cdot 10^7$ hinzutreten.

2) Das negative Vorzeichen ist hier zu nehmen, weil p nicht Zug, sondern Druck, D_a aber die Dilatation, nicht Kompression bedeutet.

In der letzten Formel ist noch der kleine Unterschied zwischen l_0 und l bzw. q_0 und q vernachlässigt, was bei festen Körpern und Flüssigkeiten einen nur unmerklichen Fehler bedingt, wenn die Temperatur nicht sehr weit vom Nullpunkt entfernt ist, da die Ausdehnungskoeffizienten für diese Körper sehr klein sind.

Zu beachten ist, daß die Änderungen dv, dl, dT sich auf adiabatische Vorgänge beziehen.

Läßt man nun die Dehnung durch den gleichen Zug isotherm erfolgen, so kommt zu der adiabatischen Dehnung de_a bezw. dD_a noch die thermische Längen- bezw. Volumenänderung hinzu, welche der Temperaturänderung dT entspricht, also βdT bezw. αdT, so daß die gesamte isotherme Dehnung wird

$$dD_i = dD_a - \alpha dT = dD_a + \frac{T\alpha^2 k_a}{\varrho_0 c_p} dD_a, \tag{21}$$

$$de_i = de_a - \beta dT = de_a + \frac{T\beta^2 E_a}{\varrho c_p} de_a. \tag{22}$$

Daraus ergibt sich das Verhältnis zwischen dem adiabatischen und isothermen Elastizitätsmodul, das gleich dem reziproken Verhältnis der zugehörigen Dehnungen ist

$$\frac{k_a}{k_i} = \frac{dD_i}{dD_a} = 1 + \frac{T\alpha^2 k_a}{\varrho_0 c_p}, \tag{23}$$

$$\frac{E_a}{E_i} = \frac{de_i}{de_a} = 1 + \frac{T\beta^2 E_a}{\varrho c_p}. \tag{24}$$

Diese Quotienten sind im allgemeinen bei festen Körpern und Flüssigkeiten nur wenig — um einige Tausendstel — von 1 verschieden[1]), der isotherme und adiabatische Modul sind also bis auf einige Tausendstel ihres Wertes einander gleich, daher praktisch als identisch anzusehen. Nur bei Gasen, bei denen natürlich nur die Volumenelastizität k in Betracht kommt, sind k_a und k_i stark voneinander verschieden, weil hier der kubische Ausdehnungskoeffizient α viel größer ist als bei festen und flüssigen Körpern.

13. Die Elastizitätsmoduln der vollkommenen Gase. Beide Moduln — isothermer und adiabatischer — lassen sich für ideale Gase, deren Zustandsgleichung als Boyle-Mariotte-Gay-Lussacsches Gesetz bekannt ist, berechnen. Die Zustandsgleichung lautet

1) Vgl. E. Grüneisen, Annalen d. Physik (4) 22, (1907), S. 842.

$$pv = p_0 v_0 (1 + \alpha t) = p_0 v_0 \alpha T \tag{25}$$

oder mit Einführung der Dichte ϱ statt des spezifischen Volumens (Volumens der Masseneinheit) v

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{p_0}{\varrho_0}(1 + \alpha t) = \frac{p_0 \alpha T}{\varrho_0}. \tag{25a}$$

Hier ist α der thermische Ausdehnungskoeffizient der idealen Gase mit dem Wert 0,00367 oder 1/273; p_0 ist ein willkürlich ausgewählter Wert des Druckes, der als Druckeinheit gilt, gewöhnlich 1 Atmosphäre[1]), v_0 ist das Volumen, welches die Gasmasse bei diesem Drucke p_0 und der Temperatur $t = 0^0$ C. d. h. $T = 273^0$ abs. einnimmt, ϱ_0 die Dichte unter denselben Bedingungen. Aus (25) bezw. (25a) gehen das Boyle-Mariottesche isotherme Druckgesetz und das Gay-Lussacsche isopiestische Ausdehnungsgesetz

$$\begin{cases} pv = p_0 v_{Tp_0} = \text{konst} \\ v = v_{0p}(1 + \alpha t) = v_{0p} \alpha T \end{cases} \tag{26}$$

als Spezialformen hervor, indem man die Temperatur bzw. den Druck konstant hält; v_{Tp_0} und v_{0p} sind die Volumina bei der Temperatur T, und dem Druck p_0 bzw. 0^0 Cels. und dem Druck p, für welche Größen nach (25) offenbar gilt

$$v_{Tp_0} = v_0(1 + \alpha t) = v_0 \alpha T, \quad v_{0p} = \frac{p_0 v_0}{p}. \tag{27}$$

Aus der Zustandsgleichung oder dem isothermen Druckgesetz läßt sich der (Volumen-)Elastizitätsmodul sofort durch Differentiation ableiten. Er ist nach Nr. 11 allgemein definiert als (unendlich kleine) Druckzunahme dp, dividiert durch die zugehörige relative Volumenzunahme $\frac{dv}{v}$, die bei positiver Drucksteigerung natürlich eine negative Zunahme (Volumenverkleinerung) und daher mit entgegengesetztem Zeichen zu benutzen ist, damit der Modul einen positiven Wert bekommt. Zu berücksichtigen sind aber die äußeren Bedingungen, beim isothermen Modul Konstanthaltung der Temperatur, beim adiabatischen Vermeidung äußerer Wärmezu- bzw. abfuhr. In beiden Fällen kommt für die Berechnung nur das aus der allgemeinen Zustandsgleichung abzuleitende Druckgesetz,

---

1) Eine Atmosphäre ist gleich $1{,}033 \frac{\text{kg-Gew.}}{\text{cm}^2} = 1013300 \frac{\text{Dynen}}{\text{cm}^2}$.

welches Volumen und Druck miteinander verbindet, in Betracht; im ersten das isotherme (Boyle-Mariottesche) Gesetz (26), im zweiten das adiabatische Druckgesetz

$$pv^{\varkappa} = \text{Konst.}, \qquad \left(\varkappa = \frac{c_p}{c_v}\right), \tag{28}$$

wobei $\varkappa$ (häufig auch mit γ oder k bezeichnet) das Verhältnis der spezifischen Wärme bei konstantem Druck c_p zur spezifischen Wärme bei konstantem Volumen c_v ist.

Durch Differentiation erhält man aus (26) und (28)

$$k_i = -\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T v = p, \quad k_a = -\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{\text{adiab.}} v = p\varkappa. \tag{29}$$

Der adiabatische Elastizitätsmodul ist also größer als der isotherme, maximal im Verhältnis 1,67 : 1 (bei den einatomigen Gasen wie Helium, Quecksilberdampf usw.), bei anderen Gasen in geringerem Grade (bei Sauerstoff, Stickstoff — auch Luft —, Wasserstoff und anderen zweiatomigen Gasen ca. 1,4 : 1).

Die Elastizitätsmoduln zeigen sich hier abhängig vom Druck, sie nehmen mit wachsendem Druck zu. Eine entsprechende Abhängigkeit ist experimentell auch für den adiabatischen Elastizitätsmodul E_a fester Körper (Metalldrähte) nachgewiesen worden.[1]) Nur nimmt hier E_a mit wachsender Spannung ab, doch ist die Änderung viel geringer als bei den Gasen.

14. Die Kontinuitätsgleichung. Findet Dilatation statt, so ändert sich die Dichte. Die Geschwindigkeit, mit der die Dilatation erfolgt, hängt mit der Geschwindigkeit der Dichteänderung eng zusammen. Ein beliebiges Masseteilchen m des Körpers habe zur Zeit t das Volumen τ, seine Dichte sei ϱ. Seine Masse $m = \tau\varrho$ ist konstant, also ergibt sich durch Differentiation dieses Produktes

$$\frac{d\varrho}{\varrho} + \frac{d\tau}{\tau} = 0. \tag{30}$$

Das zweite Glied links ist aber die unendlich kleine räumliche Dilatation, welche an der Stelle des Massenpunktes m stattgefunden hat, kann also durch einen der Ausdrücke (9) in Nr. **4** ersetzt werden, so daß man (30) z. B. schreiben kann als

$$d\varrho + \varrho \operatorname{div} u = d\varrho + \varrho\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) = 0. \tag{30a}$$

1) F. A. Schulze, Annalen d. Physik (4) Bd. **31** (1910), S. 1.

Finden die Änderungen in dem Zeitelement dt statt, so erhält man durch Division mit dt, d. h. mit anderen Worten durch Differentiation von $m = \varrho\tau$ nach der Zeit t die Geschwindigkeiten der Änderungen. Setzt man noch die Verrückungsgeschwindigkeiten

$$(31) \qquad \frac{du_x}{dt} = \mathfrak{u}_x, \quad \frac{du_y}{dt} = \mathfrak{u}_y, \quad \frac{du_z}{dt} = \mathfrak{u}_z,$$

so geht (30a) über in

$$(32) \qquad \frac{d\varrho}{dt} + \varrho\left(\frac{\partial \mathfrak{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{u}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{u}_z}{\partial z}\right) = \frac{d\varrho}{dt} + \varrho \operatorname{div} \mathfrak{u} = 0.$$

Hier beziehen sich ϱ, $\mathfrak{u}_x$, $\mathfrak{u}_y$, $\mathfrak{u}_z$ auf ein und dasselbe Massenteilchen während seiner Wanderung, sind also Funktionen der Zeit t und der jeweiligen Koordinaten x, y, z, die selbst wieder Funktionen von t und der Lage des Teilchens zu irgend einem festbestimmten Zeitpunkte, d. h. also Funktionen von t und von den Koordinaten x_0, y_0, z_0 zu irgend einer Zeit t_0 sind. In der Form (32) ist die Gleichung nur das Gesetz der Erhaltung der Masse.

Man kann eine entsprechende Gleichung aufstellen, wenn man nicht die Geschichte des Teilchens, seine Volumen- und Dichteänderung, sowie seine Ortsveränderung, ausgedrückt durch seine von der Zeit t abhängigen variablen Koordinaten x, y, z, betrachtet, sondern die Vorgänge betrachtet, welche sich im Laufe der Zeit an einem und demselben Raumpunkte x, y, z abspielen, dessen Koordinaten nun also konstant, bzw. — bei Übergang zu einem andern Raumpunkt — unabhängig variabel sind. Der Punkt, oder besser ein an seiner Stelle konstruiertes Raumelement $d\tau$, wird dabei nacheinander von verschiedenen Masseteilchen passiert.

Das im Punkte x, y, z konstruierte Raumelement sei ein Parallelepiped mit den Kanten dx, dy, dz parallel den Koordinatenachsen (Fig. 3). Der vordere Eckpunkt A habe die Koordinaten x, y, z, der diagonal gegenüberliegende A' entsprechend $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$. Die Dichte zur Zeit t sei ϱ; also ist die in ihm enthaltene Masse $\varrho d\tau$ und ihre zeitliche Änderung in der Zeit dt ist $d\tau \frac{\partial \varrho}{\partial t} dt$. Hier sind partielle Differentialquotienten mit rundem ∂ zu nehmen, weil neben der Zeit die Raumkoordinaten x, y, z unabhängig variabel sind.

Fig. 3. Parallelepipedisches Raumelement $d\tau = dx\,dy\,dz$.

Andrerseits läßt sich die Massenänderung innerhalb $d\tau$ ausdrücken mittels der durch die Oberfläche des Elementes $d\tau$ während dt ein- und austretenden Substanzmengen. Die Geschwindigkeit der Teilchen in der x-Richtung ist u_x an der Fläche 1 (x-Koordinate $= x$), $u_x^{(x+dx)} = u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx$ an der Fläche 2 (x-Koordinate $= x + dx$); die Dichten sind ebenso ϱ und $\varrho^{(x+dx)} = \varrho + \frac{\partial \varrho}{\partial x} dx$; die Flächen selbst haben die Größen $dydz$. Also tritt in das Raumelement während der Zeit dt die Masse

$$\varrho \mathfrak{u}_x dtdydz = (\varrho \mathfrak{u})_x dtdydz$$

durch Fläche 1 ein,

$$\varrho^{(x+dx)} \mathfrak{u}_x^{(x+dx)} dtdydz = (\varrho \mathfrak{u})_x^{(x+dx)} dtdydz$$

durch Fläche 2 aus.

Der Massenzuwachs durch diese Strömung ist also die Differenz

$$dtdydz\left[(\varrho \mathfrak{u})_x - (\varrho \mathfrak{u})_x^{(x+dx)}\right] = -dtdxdydz \frac{\partial (\varrho \mathfrak{u})_x}{\partial x},$$

denn es ist bis auf quadratische und höhere kleine Glieder

$$(33) \qquad (\varrho \mathfrak{u})_x^{(x+dx)} = (\varrho \mathfrak{u})_x + \frac{\partial (\varrho \mathfrak{u})_x}{\partial x}.$$

Entsprechende Ausdrücke ergeben sich für die y- und z-Komponente, so daß man als gesamten Massenzuwachs infolge der Bewegung erhält

$$(34) \qquad -dtdxdydz\left[\frac{\partial (\varrho \mathfrak{u})_x}{\partial x} + \frac{\partial (\varrho \mathfrak{u})_y}{\partial y} + \frac{\partial (\varrho \mathfrak{u})_z}{\partial z}\right] = -dtd\tau \operatorname{div}(\varrho \mathfrak{u}),$$

indem man noch $d\tau$ für das Produkt $dxdydz$ setzt. Durch Gleichsetzen der beiden Ausdrücke für die Massenänderung erhält man

$$(35) \qquad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial (\varrho \mathfrak{u})_x}{\partial x} + \frac{\partial (\varrho \mathfrak{u})_y}{\partial y} + \frac{\partial (\varrho \mathfrak{u})_z}{\partial z} = 0$$

oder anders geschrieben

$$(36) \qquad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \mathfrak{u}) = 0.$$

Das ist die als Bedingung der Kontinuität bekannte Gleichung, die besonders in der Hydrodynamik eine Rolle spielt.

Bei unendlich kleinen Deformationen, bei denen alle Änderungen — der Dichte, des Ortes usw. — und ebenso die Ge-

schwindigkeiten unendlich klein von gleicher Ordnung, etwa erster Ordnung, bleiben, werden übrigens die Gleichungen (32) und (35) identisch. Denn da die Änderungen der Koordinaten x, y, z des betreffenden Masseteilchens und seine Geschwindigkeit

$$\mathfrak{u}_x = \frac{d u_x}{dt} = \frac{dx}{dt} \text{ usw.}$$

verschwindend klein sind, so wird bis auf verschwindende Größen höherer Ordnung

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial \varrho}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \varrho}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \varrho}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \frac{\partial \varrho}{\partial t},$$

$$\frac{\partial(\varrho \mathfrak{u})_x}{\partial x} = \varrho\frac{\partial \mathfrak{u}_x}{\partial x} + \mathfrak{u}_x\frac{\partial \varrho}{\partial x} = \varrho\frac{\partial \mathfrak{u}_x}{\partial x} \text{ usw.,}$$

so daß beide Gleichungen in die einfachere, später zu benutzende, übergehen

$$(37) \qquad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \varrho\left(\frac{\partial \mathfrak{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{u}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{u}_z}{\partial z}\right) = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \varrho \operatorname{div} \mathfrak{u} = 0.$$

15. Die wirbelfreien Dehnungs- und Geschwindigkeitsvektoren u und $\mathfrak{u}$ als Gradienten skalarer Potentialfunktionen. Geschwindigkeitspotential. Die allgemeine Verschiebung der Teilchen eines elastischen Körpers läßt sich nach dem Früheren (vgl. Nr. **5**) immer in eine Translation, eine Rotation und eine Dehnung zerlegen. Mit anderen Worten: der Verschiebungsvektor u läßt sich als Summe dreier Vektoren $u^{(o)}$, $u^{(r)}$, $u^{(d)}$ darstellen, von denen der erste, $u^{(o)}$ die Translation angibt. Dieser ist (räumlich) konstant, da alle Punkte des Körpers dieselbe Translation erfahren, und kommt deshalb bei Differentiation nach Koordinaten, z. B. bei Bildung der Ausdrücke für Rotation und Dehnung in der Gl. (14) Nr. **5**, gar nicht in Betracht. Deshalb ist auch von der Translation immer abgesehen, d. h. $u^{(o)}$ ist gleich Null gesetzt worden. Die übrigbleibende Bewegung ist die Übereinanderlagerung von Rotation und Dehnung oder, anders ausgedrückt, eines Wirbels und einer wirbelfreien Bewegung. Die zugehörigen Vektoren $u^{(r)}$ und $u^{(d)}$, welche diese Bewegungen darstellen, werden als solenoidaler oder quellenfreier Vektor ($u^{(r)}$) und Potentialvektor $u^{(d)}$ bezeichnet, weil $u^{(d)}$ sich durch ein (skalares) Potential ausdrücken läßt, und $u^{(r)}$ der „solenoidalen“ Bedingung $\operatorname{div} u^{(r)} = 0$ genügt, welche aussagt, daß die Vektorlinien (Kraftlinien) des Vektors $u^{(r)}$ immer geschlossene Kurven sind und nir-

gends Anfangs- und Endpunkte (Quellen und Senken) besitzen[1]). Die Bedingung für die Darstellung von $u^{(d)}$ durch ein skalares Potential ist eben das Fehlen von Wirbeln oder Rotationen bei der durch $u^{(d)}$ dargestellten Bewegung. Mathematisch wird diese Bedingung dadurch ausgedrückt, daß die „Rotation" des Vektors $u^{(d)}$, d. h. der durch die Operation $\operatorname{rot} u^{(d)}$ gebildete neue Vektor Null ist. Man überzeugt sich, daß diese Bedingung von dem mit $u^{(d)}$ bezeichneten Verschiebungsvektor erfüllt wird, dessen Komponenten durch die Gleichungen (11) in Nr. 5 definiert sind. Man braucht dazu nur die daselbst angegebenen Werte dieser Komponenten in die Definitionsgleichungen der „Rotation" einzusetzen, nämlich für die drei Komponenten in der x-, y-, z-Richtung die Gleichungen

$$(38)\qquad \operatorname{rot}_x u = \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z},\quad \operatorname{rot}_y u = \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x},\quad \operatorname{rot}_z u = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}.$$

Sind diese Werte bei irgend einem Vektor Null, so lassen sich die Komponenten desselben immer als räumliche Differentialquotienten einer einzigen skalaren Größe Φ ausdrücken, die (skalares) Potential genannt wird, nämlich

$$(39)\qquad u_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x},\quad u_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y},\quad u_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z},\quad \text{allgemein } u_l = \frac{\partial \Phi}{\partial l},$$

wobei u_l die Komponente in einer beliebigen Richtung l ist. Der Vektor u wird in diesem Falle Gradient des Skalars Φ genannt[2]), was in Vektorschreibweise durch

$$(40)\qquad u = \operatorname{grad} \Phi$$

ausgedrückt wird. Die Größe von u in irgend einer Richtung l, also die Komponente u_l, ist gleich dem Anstieg der Funktion Φ in dieser Richtung. Ein solches skalares Potential ist immer bei wirbelfreier Bewegung vorhanden.

1) Vgl. v. Ignatowsky, Vektoranalysis; diese Sammlung Bd. VI, 1.

2) Früher wurde die negative Ableitung $-\frac{\partial \Phi}{\partial l}$ zur Definition des Gradienten benutzt, also der Abfall der Funktion Φ als Gradient bezeichnet. Die neue Definition ist mit der in der Infinitesimalrechnung üblichen Vorstellungsweise besser im Einklang. Will man entsprechend der alten Bezeichnung $u_l = -\frac{\partial \Phi}{\partial l}$ erhalten (mit negativem Vorzeichen), so hat man zu setzen $u = -\operatorname{grad} \Phi$.

Die Wirbelbewegung oder Rotation, bei der die „Divergenz" Null ist, führt zur Darstellung des die Bewegung angebenden Vektors, z. B. $u^{(r)}$, durch das sogenannte Vektorpotential. Wirbelbewegungen kommen aber bei Schwingungen mit unendlich kleiner Amplitude in reibungslosen Medien nicht vor.

Was für den Verschiebungsvektor u gilt, gilt auch für den Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{u}$, der ja aus jenem einfach durch Differentiation nach der Zeit hervorgeht. Bei wirbelfreier Bewegung ist $\mathfrak{u}$ der Gradient einer skalaren Funktion φ, des Geschwindigkeitspotentials. Ist dieses Potential bei irgend einem Problem gefunden, so ist damit die Bewegung an allen Stellen bestimmt. Da die Einführung des Geschwindigkeitspotentials die Rechnung vereinfacht, indem statt dreier Größen — der Komponenten in drei Raumrichtungen — nur eine einzige zu bestimmen ist, so spielt es besonders bei komplizierten Problemen der Bewegungen von Flüssigkeiten und Gasen eine große Rolle. Einfachere Probleme, z. B. solche, bei denen alles nur von einer einzigen Koordinate — außer der Zeit — abhängt, sogenannte eindimensionale Bewegungen, werden ebensogut ohne dies Hilfsmittel behandelt.

II. Abschnitt.

Elementare Theorie der von einer einzigen Koordinate abhängigen Schwingungen und Wellen in kontinuierlichen Medien. Eindimensionale Probleme.

3. Kapitel.

Eigenschwingungen vom Typus der Saitenschwingungen bei festen Körpern.

16. Bewegungsgleichung der Longitudinalschwingungen von Stäben und Saiten. Bei gewissen Formen der schwingenden Körper spielen sich die Bewegungen so ab, daß die Lage jedes Teilchens im wesentlichen durch eine einzige Koordinate bestimmt wird, oder die Bewegung läßt sich wenigstens in mehrere, nur von je einer Koordinate abhängige Bewegungen zerlegen, die sich einfach superponieren. Wenn die Deformationen unendlich klein bleiben, ist Superposition immer gestattet. Solche Körper sind Saiten, dünne Stäbe, Gassäulen mit gegen die Länge geringen Querschnittdimensionen, seien sie gerade oder schwach gekrümmt, kurz alle wesentlich in einer Dimension, d. h. linear ausgedehnte Körper.

Die Schwingungen erfolgen hier bei ganz verschiedenartigen Körpern (z. B. festen Saiten und gasgefüllten Pfeifen) teilweise nach denselben Gesetzen. Dieselben Gesetze gelten auch für räumlich ausgedehnte ebene Wellen und für Kugelwellen, so daß auch diese hier mitbehandelt werden können und sollen. Zu den Kugelwellen gehören auch die Schwingungen in konischen Pfeifen. Etwas andere Gesetze befolgen die Transversalschwingungen der Stäbe, die eine besondere Behandlung erfordern.

Stäbe und Saiten verhalten sich in bezug auf Longitudinalschwingungen ganz gleich. Eine Saite ist ein Stab von so geringen Querdimensionen — im Verhältnis zur Länge —, daß er außerordentlich leicht biegsam ist, also sehr geringe — im idealen Grenzfall keine — Steifigkeit besitzt. Wegen dieser seitlichen

Nachgiebigkeit muß die Saite an beiden Enden befestigt, eingeklemmt werden, und um ihr eine gerade gestreckte Form zu geben, muß sie gespannt werden, womit natürlich eine gewisse Dehnung über die natürliche Länge hinaus verbunden ist. Je stärker die Spannung, desto größer der Widerstand gegen seitliche (transversale) Verbiegungen. Daher werden die Transversalschwingungen der Saite von der Spannung beeinflußt, der sie unterworfen ist, die Longitudinalschwingungen jedoch nur insofern, als wegen der durch die Spannung erzeugten Dehnung der Dehnungs-Elastizitätsmodul E sich ändert. Er muß dann mit dem für die gerade herrschende Spannung gültigen Wert in die Rechnung eingesetzt werden.

Bei allen jetzt zu behandelnden Problemen seien die Verschiebungen u, die Geschwindigkeiten $\mathfrak{u}$ und die Dichteänderungen von der 1. Ordnung unendlich klein angenommen. Höhere Potenzen sowie Produkte dieser Größen werden dann von höherer Ordnung unendlich klein, können also gegen Glieder der ersten Ordnung vernachlässigt werden.

Der Stab (oder die Saite) habe den überall gleichen Querschnitt q von im übrigen beliebiger Form. Die Dichte sei ϱ; die Masse eines Stückes von der Längeneinheit ist daher $q\varrho$, ein Ausdruck der zuweilen als Längendichte des Stabes bezeichnet wird. Die (gerade gestreckte) Achse des Stabes sei x-Achse, die zugleich Abszissenachse sein soll. Die Stablänge sei vorläufig unbestimmt.

Bei Longitudinalschwingungen verschieben sich die von materiellen Teilchen gebildeten Querschnitte parallel mit sich selbst in der Richtung der Achse x. Dabei entstehen Spannungen nur in der x-Richtung. Während des Zeitelementes dt erleide der an der Abszisse x gelegene Querschnitt die Verschiebung[1]) u mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$; die Werte für den an der Stelle $x + dx$ gelegenen Querschnitt sind

$$u^{(x+dx)} = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad \text{und} \quad \mathfrak{u}^{(x+dx)} = \mathfrak{u} + \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x} dx.$$

Aus der ersten der allgemeinen Bewegungsgleichungen (6) in Nr. 8 erhält man sofort durch Spezialisierung, indem man Ab-

1) Die Verschiebungen in den Koordinatenrichtungen x, y, z werden hier und weiterhin der einfacheren Schreibweise wegen mit u, v, w statt u_x, u_y, u_z, die Geschwindigkeiten mit $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ statt $\mathfrak{u}_x$, $\mathfrak{u}_y$, $\mathfrak{u}_z$ bezeichnet.

hängigkeit aller Größen nur von x annimmt und Massenkräfte (Schwere) vernachlässigt, also $\mathfrak{X}' = 0$ setzt, die Differentialgleichung. Statt $\mathfrak{X}_x$ wird die hier allein vorhandene Spannung in Richtung der Stabachse p genannt. So ergibt sich die Gleichung

$$(1) \qquad \varrho \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Sie ist auch leicht direkt abzuleiten. Man betrachtet das zylindrische Stück des Stabes von der unendlich kleinen Höhe dx zwischen den Querschnitten q an den Stellen x und $x + dx$ (Fig. 4). Auf den Querschnitt q bei der Abszisse x, d. h. auf die linke Endfläche des Zylinders, wirkt die Kraft pq in der $+x$-Richtung. Auf den Querschnitt q bei $x + dx$ wirkt analog die Kraft

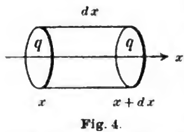


Fig. 4. Zylindrisches Raumelement $d\tau = q\,dx$.

$$-p^{(x+dx)} q = -\left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) q.$$

Sie ist hier mit negativem Vorzeichen anzusetzen, weil die innere Normale der rechten Endfläche die $-x$-Richtung ist. Die Summe beider Kräfte, also $-q \frac{\partial p}{\partial x} dx$ ist die gesamte auf den Zylinder wirkende bewegende Kraft, und diese muß nach dem zweiten Newtonschen Bewegungsgesetz gleich der Masse des Zylinders mal der Beschleunigung, also $= q\,dx \varrho \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial t}$ sein. Durch Einsetzen beider Ausdrücke und Wegheben der beiderseits gleichen Faktoren erhält man Gl. (1).

Nun lassen sich Druck p und Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$ einfach durch die Verschiebung u des Querschnitts ausdrücken. Es ist

$$(2) \qquad \mathfrak{u} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{und} \quad p = E \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Denn mit der Verschiebung u ist die dadurch erzeugte Spannung p verbunden und $\frac{\partial u}{\partial x}$ ist die relative lineare Dehnung, d. h. die Dehnung der Längeneinheit des Stabes, oder die Dehnung der Strecke dx, dividiert durch dx. Durch Einsetzen in (1) erhält man

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad c_1^2 = \frac{E}{\varrho}$$

als Differentialgleichung der Bewegung der Stabquerschnitte, wo-

bei die Konstante c_1 bestimmt ist durch

$$c_1^2 = \frac{E}{\varrho}. \tag{4}$$

Diese Konstante hängt nur vom Dehnungsmodul E ab, nicht von etwaiger Spannung P, welcher der Stab außerdem noch dauernd unterworfen ist. Von letzterer nur insofern, als E sich mit P ändern kann; c_1 ist, wie weiter folgt (vgl. Nr. 20) die Geschwindigkeit, mit der eine Schwingung sich als Longitudinalwelle längs des Stabes fortbewegt. Dieselbe Form der Differentialgleichung, nur mit andern Werten der Konstante c ergibt sich für die Schwingungen linearer Gassäulen (Pfeifen), für ebene Wellen in ausgedehnten Gasatmosphären, für Drillungs- oder Torsionsschwingungen von Stäben und Saiten und für Transversalschwingungen von Saiten. Vor der Integration der Gl. (3) sollen die Gleichungen für die beiden letztgenannten Schwingungsarten abgeleitet werden.

17. Bewegungsgleichung der Torsionsschwingungen von Stäben, Hohlzylindern und Saiten mit kreisförmigem Querschnitt. Die Ableitung der Bewegungsgleichung ist ganz analog derjenigen in Nr. 16. Die Verschiebungen der Querschnitte, die wieder wie alle andern Größen nur von x abhängen, sind Drehungen in ihrer eigenen Ebene um die Stabachse. Der Drehungswinkel des Querschnitts bei der Abszisse x sei ψ. Seine Zunahme bis zum benachbarten Querschnitt bei $x + dx$ ist $d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx$ (Fig. 5). Dies ist der Winkel, um den zwei benachbarte Querschnitte gegeneinander verdreht sind. Schneidet man aus dem Stab einen konzentrischen Hohlzylinder von der Dicke dr mit den Radien r und $r + dr$ heraus, so gilt das gleiche von den ringförmigen Querschnitten desselben. Jedes Flächenelement eines solchen

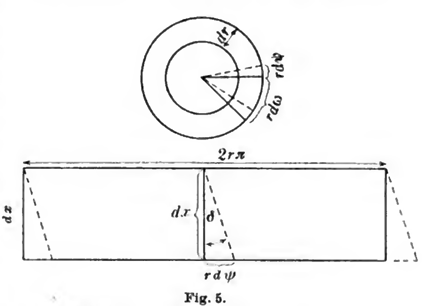


Fig. 5.
Oben: kreisförmiger Querschnitt.
Unten: aufgerolltes Mantelstück von der Höhe dx eines tordierten Stabes.

Ringes von der Größe $r\,dr\,d\omega$ verschiebt sich um den Winkel $d\psi$, also um die Strecke $r\,d\psi$ in tangentialer Richtung gegen das entsprechende Element des benachbarten Querschnitts. Diese Strecke, geteilt durch den Abstand dx der beiden Querschnitte ist der Scherungswinkel δ (vgl. Nr. 3). Also ist

$$\delta = r\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{5}$$

Zwischen δ und dem auf die Flächeneinheit wirkenden rücktreibenden Scherungsdruck P_ψ, der durch die Drillung hervorgerufen wird und hier überall tangential (d. h. in der Verschiebungsrichtung) wirkt, gilt die dritte der Gleichungen (14) von Nr. 11 $P_\psi = -F\delta$, die hier mit Rücksicht auf (5) wird[1])

$$P_\psi = -Fr\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{6}$$

Der Stab bzw. der Hohlzylinder wird durch Querschnitte senkrecht zur Achse in flache Scheiben bzw. Ringkörper von der Höhe dx zerlegt. Für jeden gilt die Bewegungsgleichung, da es sich um drehende Bewegungen handelt, in der Form:

Drehmoment der wirkenden Kräfte
= Trägheitsmoment mal Winkelbeschleunigung.

Die hierin vorkommenden Größen sind zu berechnen. Für einen (Kreis-)Hohlzylinder der Höhe dx, vom Radius r und der Wanddicke dr mit der Dichte ϱ und der Masse m ist das Trägheitsmoment $= mr^2 = 2\pi r\,dr\,dx\,\varrho r^2$, die Winkelbeschleunigung $= \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$.

Das Drehmoment ergibt sich aus der Kraft P_ψ. Auf das Flächenelement $r\,dr\,d\omega$ der Grundfläche des Hohlzylinders (bei der Abszisse x) wirkt die Tangentialkraft P_ψ, also das Drehmoment $P_\psi r$. Das Drehmoment für die ganze ringförmige Grundfläche ist also

$$2\pi r\,dr\,P_\psi r = 2\pi r^2 dr\,P_\psi.$$

Für die benachbarte Fläche bei der Abszisse $x + dx$ ist das Drehmoment

$$-2\pi r^2 dr\left(P_\psi + \frac{\partial P_\psi}{\partial x}dx\right).\,^{2)}$$

1) Das negative Vorzeichen tritt hier auf, weil P_ψ nicht die deformierende, sondern die durch die Deformation geweckte rücktreibende Schubkraft ist.

2) Mit negativem Vorzeichen zu nehmen, weil das auf diesen Querschnitt ausgeübte Drehmoment offenbar dem auf den anderen Querschnitt ausgeübten entgegengesetzt gerichtet ist.

Auf den Hohlzylinder im Ganzen wirkt daher die algebraische Summe beider Ausdrücke als

$$\text{Drehmoment} = -2\pi r^2 dr dx \frac{\partial P_\psi}{\partial x}.$$

Durch Einsetzen dieser Ausdrücke in das obige Bewegungsgesetz erhält man mit Rücksicht auf den Wert, den P_ψ nach (6) besitzt, unter Weglassung der beiderseits gleichen Faktoren $2\pi r^3 dr dx$ die Gleichung

$$(7) \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c_2^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \qquad c_2^2 = \frac{F}{\varrho}.$$

Diese Gleichung gilt für jeden beliebigen Hohlzylinder beliebiger Wanddicke, da diese in der Gleichung gar nicht vorkommt, also auch für den Vollzylinder, d. h. den Stab mit kreisförmigem Querschnitt und dessen Grenzfall, die unendlich dünne Saite. Auch hier ist wieder zu berücksichtigen, daß Stab und Saite unter beliebiger achsialer Spannung stehen können. Diese beeinflußt nur den Wert des Torsionsmoduls F (und die Dichte ϱ), aber nicht die Art der Bewegung. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Torsionswellen c_2 ist von den Querdimensionen des Stabes unabhängig und hängt nur vom Material ab. Sie ist im allgemeinen kleiner als die der Longitudinalwellen, da $F < E$ ist.

18. Bewegungsgleichung der Transversalschwingungen von Saiten. Die Saite habe den überall gleichen Querschnitt q, die überall gleiche Dichte ϱ, erstrecke sich in der x-Richtung und werde durch die auf die Endflächen wirkende spannende Kraft P, also durch den pro Flächeneinheit wirkenden Zug $p = \frac{P}{q}$ gespannt. Die Kraft P kann z. B. durch ein angehängtes Gewicht erzeugt werden; sie wirkt dann gleichmäßig auf alle Querschnitte der Saite. Jeder von ihnen wird durch sie um eine mit P proportionale Strecke in der Saitenrichtung x aus seiner natürlichen Lage entfernt. Diese Verschiebung u_0 bleibt konstant, sie charakterisiert die Ruhelage der gespannten Saite; über sie lagern sich die periodischen Verschiebungen der Schwingungen, die mit u, v, w bezeichnet werden sollen. Im allgemeinen kann die Saite die Form einer (doppelt gekrümmten) Raumkurve annehmen, wenn nämlich außer u beide Transversalverschiebungen v und w vorhanden sind. Da aber die Verrückungen unendlich klein bleiben sollen, so gilt das in Nr. **5** erwähnte Superpositionsprinzip. Man kann auf Grund desselben rück-

wärts die allgemeine Transversalverschiebung in zwei unabhängig voneinander verlaufende Verschiebungen v und w zerlegen, die in je einer festen Ebene erfolgen.

Wir nehmen jedoch zunächst den allgemeinen Fall an, daß die Punkte der Saite nach allen drei Koordinatenrichtungen Verrükkungen u, v, w erfahren. Infolge der neben v und w vorhandenen Verrückung u dehnt sich die Saite in ihrer eigenen Richtung, die mit s bezeichnet werden soll; ein Längenelement der Saite wird durch ds dargestellt. Mit dieser Dehnung in der Richtung s ist auch eine Vergrößerung der vorhandenen Spannung p verbunden; aber Dehnung und Spannungsvergrößerung sind unendlich klein.

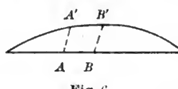


Fig. 6.
Seitliche Verschiebung der Punkte einer gebogenen Saite.

Ein Punkt A der Saite gelange durch die Verrückungen u, v, w nach A' (Fig. 6); der um dx von A entfernte, benachbarte Punkt B erfährt die Verrückungen $u + du$, $v + dv$, $w + dw$ und gelangt nach B'. Dabei ist $A'B' = ds$ und $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx = u' dx$, $dv = v' dx$, $dw = w' dx$, indem u' für $\frac{\partial u}{\partial x}$, v' für $\frac{\partial v}{\partial x}$, w' für $\frac{\partial w}{\partial x}$ gesetzt wird. Die Koordinaten der Endpunkte von ds sind also

$$x + u, \quad v, \quad w;$$

$$x + dx + u + du, \quad v + dv, \quad w + dw.$$

Daraus folgt

$$ds^2 = (dx + du)^2 + dv^2 + dw^2$$

$$= dx^2\left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] = dx^2[(1+u')^2 + v'^2 + w'^2].$$

Da nun u', v', w' unendlich klein von derselben Ordnung sind, so folgt mit Vernachlässigung quadratischer und höherer Glieder

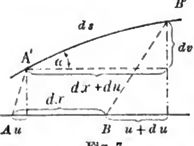


Fig. 7.
Längenelement einer Saite bei allgemeinster unendlich kleiner Verrückung.

$$ds = dx(1 + u'). \tag{8}$$

Es ergibt sich also, wie es sein muß, eine lineare (unendlich kleine) Dehnung.

Sind ferner α, β, γ die Winkel, welche ds mit den Achsen x, y, z bildet, so folgt (vgl. Fig. 7)

$$\begin{cases} dx + du = ds\cos\alpha, \quad dv = ds\cos\beta, \\ dw = ds\cos\gamma, \end{cases} \tag{9}$$

und hieraus erhält man mit Rücksicht auf (8) unter Vernachlässigung unendlich kleiner Glieder

$$(10) \qquad \cos\alpha = 1, \quad \cos\beta = \frac{\partial v}{\partial x} = v', \quad \cos\gamma = \frac{\partial w}{\partial x} = w'.$$

Dies bedeutet, daß die Saite nahezu gerade bleibt, so daß man überall s durch x ersetzen kann.

Die Dehnung der Saite ist u'; also wird die gesamte in der Saitenrichtung s, d. h. angenähert in der Richtung x wirkende spannende Kraft $P + qEu' = P + qE\frac{\partial u}{\partial x}$, wobei E der Dehnungsmodul für die durch P gespannte Saite ist. Diese Spannung ist längs der Saite nicht mehr konstant, da $\frac{\partial u}{\partial x}$ sich langsam mit dem Orte ändert; P dagegen ist konstant. Auf das Längenelement $dx\,(=ds)$ der Saite zwischen den Punkten A und B wirken also am Punkt A die Kraftkomponenten

$$(11) \qquad \begin{cases} X = -(P + qEu')\cos\alpha = -(P + qEu') \\ Y = -(P + qEu')\cos\beta = -(P + qEu')v', \\ Z = -(P + qEu')\cos\gamma = -(P + qEu')w'. \end{cases}$$

Sie sind mit negativem Vorzeichen versehen, weil die Richtung der am Endpunkt A von ds wirkenden Kraft, die von dem links gelegenen Saitenteil auf ds ausgeübt wird, offenbar nach links, d. h. in die negative x-Richtung fällt.

Am Punkte B wirken ebenso (hier mit positivem Vorzeichen versehen, weil die Spannung nach $+x$ hin wirkt) die Kräfte

$$(11\text{a}) \qquad \begin{cases} X^{(x+dx)} = P + qEu' + \dfrac{\partial(P + qEu')}{\partial x}dx \\ Y^{(x+dx)} = (P + qEu')v' + \dfrac{\partial[(P + qEu')v']}{\partial x}dx \\ Z^{(x+dx)} = (P + qEu')w' + \dfrac{\partial[(P + qEu')w']}{\partial x}dx. \end{cases}$$

Die algebraischen Summen von X und $X^{(x+dx)}$, Y und $Y^{(x+dx)}$ usw. sind die auf das Längenelement dx wirkenden Kräfte; sie ergeben sich zu[1]) $qE\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx$, $P\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}dx$, $P\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}dx$. Diese Größen müssen

1) Bei dieser Ableitung ist zu beachten, daß P konstant, also $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$ ist. Weiter ist die infolge der Ausbiegung und der dabei

gleich den entsprechenden beschleunigenden Kräften sein, d. h. gleich $m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $m\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$, $m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$, woraus, da die Masse $m = \varrho q dx$ ist, durch Gleichsetzung beider Seiten and Weglassung identischer Faktoren rechts und links folgt

$$(12)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\varrho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{p}{\varrho}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{p}{\varrho}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

Alle drei Verrückungen befolgen also formell dasselbe Gesetz

$$(13)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

wobei die Konstante c, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen, gegeben ist durch die Beziehung

$$(14)\qquad \begin{cases} c_1^2 = \frac{E}{\varrho} & \text{für Longitudinalwellen} \\ c^2 = \frac{p}{\varrho} = \frac{P}{q\varrho} & \text{für Transversalwellen;} \end{cases}$$

$q\varrho$ ist die Masse eines Saitenstückes von der Länge Eins und wird auch Längendichte genannt.

Die Longitudinalwellen der Saiten unterscheiden sich in nichts von denen der Stäbe, für beide hat c den gleichen durch die Materialkonstante E bestimmten Wert c_1. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Torsionswellen war nach Nr. 17 ebenfalls durch eine Materialkonstante, den Torsionsmodul F, bestimmt; sie ist durchweg kleiner als die der Longitudinalwellen, da $F < E$ ist. $\left(\text{Im Mittel ist } F = \frac{E}{3} \text{ bis } \frac{E}{2}\right)$. Die Fortpflanzungsgeschwindig-

---

eintretenden Verlängerung zu $\frac{P}{q}$ hinzukommenden Zusatzspannung Eu' klein gegen $\frac{P}{q}$. Daher kann in der Summe $P + qEu'$ das letzte Glied vernachlässigt werden; das bei der Differentiation noch auftretende Glied $v'qE\frac{du'}{dx}$ ist aus demselben Grunde zu vernachlässigen, weil qEv' von derselben Größenordnung ist wie qEu'. Will man nur die Gleichungen der Transversalschwingungen ableiten, so kann man von vornherein die Zusatzkraft qEu' gegen P vernachlässigen. Für eine strengere Herleitung der Gleichungen (12) hat man die Gleichungen (6) von Nr. 8 anzusetzen und $\mathfrak{X}_{(x)}$, $\mathfrak{X}_{(y)}$ usw. aus den Grenzbedingungen Nr. 11 zu berechnen, indem man die äußeren Kräfte $\bar{\mathfrak{X}}$, $\bar{\mathfrak{Y}}$, $\bar{\mathfrak{Z}}$ sämtlich gleich Null annimmt.

keit der Transversalwellen (von Saiten) wird durch die willkürlich wählbare Spannung p bestimmt und ist daher wie diese willkürlich zu verändern. Sie ist immer wesentlich kleiner als jene beiden ersten Werte, da die anwendbaren Spannungen, die natürlich unter der Grenze der Zerreißfestigkeit, meist sogar sehr erheblich darunter liegen, weit kleiner sind als der Dehnungsmodul. Der Größenordnung nach ist das Verhältnis etwa 1 : 100 bis 1 : 10000, so daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten von Transversal- und Longitudinalwellen (und daher auch die zugehörigen Schwingungszahlen) sich wie 1 : 10 bis 1 : 100 verhalten. Tabelle 1 gibt eine kleine Übersicht darüber; für die Konstanten E und F, die bekanntlich je nach der Herkunft und Bearbeitung des Materials etwas variieren, sind die von F. Kohlrausch[1]) zusammengestellten mittleren Werte angenommen worden.

19. Integration der Bewegungsgleichung nach d'Alembert. Die Integration der Differentialgleichung (3) in Nr. **16** bzw. (13) in Nr. **18** kann nach zwei verschiedenen Methoden erfolgen, die von d'Alembert und von D. Bernoulli gefunden sind und das Integral in verschiedener Form liefern. Die Bernoullische Lösung mittels partikulärer Integrale ist für die Akustik die wichtigere; sie stellt die ausgebildeten stehenden Schwingungen dar. Die d'Alembertsche Lösung lehrt die Ausbildung dieser stehenden Schwingungen aus fortlaufenden Wellen durch mehrfache Reflexion an den Enden des schwingenden Systems kennen.

Die d'Alembertsche Lösung.

Durch Einführung zweier neuer Variablen ξ und η anstelle von x und t, die linear mit diesen zusammenhängen, wird die vorliegende partielle Differentialgleichung 1. Ordnung und 1. Grades umgeformt. Man setzt

$$(15) \qquad \begin{cases} \xi = x + ct \quad \text{also} \quad x = \frac{1}{2}(\xi + \eta) \\ \eta = x - ct \qquad\qquad t = \frac{1}{2c}(\xi - \eta). \end{cases}$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

1) F. Kohlrausch, Lehrbuch der prakt. Physik, 11. Aufl., 1910, Tabelle 20 auf S. 709.

Tabelle 1.

	Dichte ϱ	Elast. modul E $\frac{\text{kg — Gew}}{\text{mm}^2}$	Schallgeschw. c_1 für Longitud.-Wellen $\frac{\text{m}}{\text{sek}}$	Torsionsmodul F $\frac{\text{kg — Gew}}{\text{mm}^2}$	Schall-geschw. c_2 für Torsionswellen $\frac{\text{m}}{\text{sek}}$	Poissonsche Elastizitäts-zahl μ
Aluminium	2,7	6 300— 7 200	5 000	2 300—2 700	ca. 3 000	0,33
Blei	11,3	1 500— 1 700	1 300	550	„ 700	0,43
Eisen:						
Schmiede-	7,8	20 000—22 000	} 5 100	7 000—8 300	„ 3 100	0,28
Stahl	7,8	20 000—22 000		8 000—8 300	„ 3 200	0,28
Guß- (grau)		7 500—13 000		} 5 000		} 0,23—0,27
Guß- (weiß)		18 000				
Gold	19,2	7 600— 8 100	2 100	2 800	„ 1 200	0,41
Kupfer	8,9	10 000—13 000	3 600	3 900—4 800	„ 2 200	0,34
Messing	8,4	8 000—10 000	3 200	2 700—3 700	„ 1 900	0,3—0,4
Nickel	8,8	20 000—22 000	4 900	7 800	„ 3 000	0,30
Platin	21,4	16 000—17 500	2 800	6 000—7 000	„ 1 700	0,38
Silber	10,5	7 000— 8 000	2 700	2 500—2 900	„ 1 600	0,37
Zink	7,1	8 000—13 000	3 900	4 000	„ 2 400	0,2—0,3
Glas	2,5	5 000— 8 000	5 000	2 000—3 000	„ 3 000	0,2—0,3
Holzfaser		500— 1 200	3 000—4 000			

und durch Einsetzen dieser Werte geht die Differentialgleichung (13) über in

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \tag{16}$$

Diese Gleichung liefert, nach η integriert,

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \Phi'(\xi),$$

wo $\Phi'(\xi)$ eine Funktion bloß von ξ, nicht auch von η ist; und dies gibt, nach ξ integriert,

$$u = \Phi(\xi) + \Psi(\eta) = \Phi(x + ct) + \Psi(x - ct). \tag{17}$$

Hinzufügung einer Integrationskonstante ist nicht nötig, da diese schon in Φ oder Ψ mitenthalten zu denken ist.

Diese Lösung zeigt, daß die allgemeine Bewegung, welche der Differentialgleichung genügt, die Übereinanderlagerung zweier, in ihrer Form zunächst beliebiger Wellenzüge ist, von denen einer (Ψ) nach der positiven x-Richtung, der andere (Φ) nach der negativen x-Richtung hinläuft, und zwar beide mit derselben Geschwindigkeit c (vgl. dazu Bd. I, Nr. 8).[1] Die Form der Funktionen Φ und Ψ sowie die Entscheidung darüber, ob beide oder nur eine und welche von ihnen in Betracht kommen, wird durch den Zustand der Saite, den sie zu irgendeiner gegebenen Zeit (meist dem Anfangspunkt der Zeit) besitzt und durch die Bedingungen, welche an den Enden der Saite (oder des Stabes) zu erfüllen sind, bestimmt, d. h. also in der gebräuchlichen Ausdrucksweise durch den Anfangszustand und die Grenzbedingungen. Man kann diese zusammenfassend als zeitliche und räumliche (oder örtliche) Grenzbedingungen bezeichnen.

1) Daß die Verbindung der Orts- und Zeitvariablen x und t in der Form $x + ct$ und $x - ct$ als Argument beliebiger Funktionen ein Fortschreiten der Bewegung in Wellenform ergibt, erkennt man leicht. Diese mit ξ und η bezeichneten Größen und damit auch die Funktionswerte Φ bzw. Ψ bleiben offenbar dieselben, wenn man mit t auch x in geeigneter Weise variiert, d. h. zu einem anderen Orte (in Richtung wachsender oder abnehmender x) übergeht. Wenn t um dt wächst, muß x um $dx = c dt$ zunehmen (bei der Funktion mit dem Argument $x - ct$) oder abnehmen (bei derjenigen mit $x + ct$), damit das Argument und die Funktion konstant ihren Wert behalten. Um die Strecke dx ist der Zustand in der Zeit dt fortgewandert, und das Verhältnis dx/dt, das sich hier konstant $= c$ ergibt, ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit (vgl. Bd. I Nr. 8).

Die räumlichen Grenzbedingungen können je nach den Umständen verschieden gewählt werden, sind aber meist durch die Natur der Dinge in jedem einzelnen Fall auf einige besondere beschränkt; bei einer biegsamen Saite z. B. müssen offenbar beide Enden befestigt (eingeklemmt) sein, bei einem Stab können sie fest oder frei sein usw. Als ideale Fälle können allerdings auch die vorkommen, daß ein oder beide Enden im Unendlichen liegen, so daß es gleichgültig ist, wie sie dort beschaffen sind. Doch ist das lediglich ein gedachter Fall, der nur immer kurze Zeit verwirklicht ist, nämlich immer nur solange, als eine von einem mittleren Punkt der Saite ausgehende Welle noch nicht das Ende erreicht hat, an dem stets Reflexion, also Störung der ursprünglichen Bewegung stattfindet. Für die Akustik kommen diese Fälle praktisch nicht in Betracht, sie sind aber trotzdem wichtig, weil sie in das Wesen der Wellenbewegung und die Entstehung der stehenden Wellen oder Schwingungen Einblick gewähren.

20. Räumliche und zeitliche Grenzbedingungen. Der Anfangszustand (zeitliche Grenzbedingung). Für alle Punkte des schwingenden Systems muß Lage und Geschwindigkeit zu einer beliebigen Zeit gegeben sein, dann ist der weitere Verlauf der Bewegung nach den Gesetzen der Dynamik völlig bestimmt. Es müssen also

Verrückung u (bzw. v und w) als Funktion von x

und

Geschwindigkeit $\frac{\partial u}{\partial t}$ $\left(\text{bzw } \frac{\partial v}{\partial t} \text{ usw.}\right)$ als Funktion von x

für alle Werte x längs der ganzen Stab-(Saiten-)länge für diesen einen Zeitmoment gegeben sein.

Die (räumlichen) Grenzbedingungen. Sie sind für die verschiedenen Fälle gesondert zu behandeln.

I. Longitudinalschwingungen von Stäben. Der Stab kann an irgendeinem Punkte seiner Länge (z. B. in der Mitte) eingespannt sein, dann sind beide Enden frei, oder er kann an beiden Enden festgeklemmt sein (beide Enden fest); oder schließlich kann ein Ende fest und eines frei sein. Der wichtigste Fall ist hier derjenige mit zwei freien Enden.

An festen Enden — und ebenso natürlich an etwaigen Klemmstellen auf der Länge des Stabes, die zu Knoten werden — muß offenbar die Verrückung $u = 0$ sein. Da die benachbarten Quer-

schnitte sich diesen Querschnitten periodisch nähern und entfernen, so finden hier periodische Dilatationen und Kompressionen, also Dichteänderungen, und zwar in besonders hohem Grade statt.

An freien Enden ist die Beweglichkeit nicht beschränkt und es findet kein Widerstand, kein Gegendruck statt. Daher ist an diesen Stellen auch keine Dilatation oder Kompression und Dichteänderung vorhanden Für ein freies Ende gilt daher die Bedingung $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$.

II. Torsionsschwingungen von Stäben. Hier gelten ähnliche Betrachtungen. Die Enden können fest (eingespannt) oder frei sein.

An festen Enden — und überhaupt an den Befestigungsstellen des Stabes — muß der Drehungswinkel $\psi = 0$ sein.

An freien Enden verschwindet die Scherung, also muß dort $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$ sein.

III. Longitudinal- und Torsionsschwingungen von Saiten. Die mathematischen Bedingungen haben dieselbe Form ($u = 0$ bzw. $\psi = 0$) wie bei Stäben; es kommen nur feste Enden vor, freie sind hier ausgeschlossen.

IV. Transversalschwingungen von Saiten. Auch hier sind nur feste Enden zu berücksichtigen. An diesen muß die Verrückung verschwinden, d. h. es muß v (bzw. w) $= 0$ sein.

21. Berechnung von $\Phi(x + ct)$ und $\Psi(x - ct)$ aus den Anfangs- und Grenzbedingungen für den beiderseits unbegrenzten Stab (oder Saite). Zu unterscheiden sind die drei Fälle des beiderseits unbegrenzten, des einseitig begrenzten und des beiderseits begrenzten Stabes (oder der Saite).

a) Beiderseits unendlich langer, unbegrenzter Stab oder Saite. (Räumliche) Grenzbedingungen sind nicht vorhanden. Die zeitlichen Bedingungen in der Form der Anfangsbedingungen sind: zur Zeit $t = 0$ muß Lage und Geschwindigkeit der Teilchen als Funktion ihrer Ruhelage x längs des ganzen Stabes, also von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ gegeben sein. Wenn man diese Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ nennt, so sind die Anfangsbedingungen:

$$\text{(18)} \quad \text{Für } t = 0: \quad u_0 = f(x) \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0 = g(x).$$

Das liefert mit Rücksicht auf Gl. (17) in Nr. 19, indem man darin $t = 0$ setzt, bezw. sie nach t differentiiert und dann $t = 0$

4*

setzt, die Bestimmungsgleichungen für Φ und Ψ:

$$\Phi(x) + \Psi(x) = u_0 = f(x), \tag{19}$$

$$c\Phi'(x) - c\Psi'(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0 = g(x). \tag{20}$$

Φ' und Ψ' bedeuten die Differentialquotienten von Φ und Ψ nach dem ganzen Argument der Funktionen, also nach $x + ct$ bezw. $x - ct$. Durch Multiplikation der Gleichung (20) mit dx und Integration nimmt sie die Form an

$$\Phi(x) - \Psi(x) = \frac{1}{c}\int g(x)dx + 2C, \tag{20a}$$

wo das Integral auf der rechten Seite natürlich ebenfalls eine von $x = -\infty$ bis $+\infty$ gegebene Funktion von x, und $2C$ die willkürliche Integrationskonstante ist.

Durch Addition und Subtraktion von (19) und (20a) folgt

$$\left\{\begin{aligned} \Phi(x) &= \frac{1}{2}\left[f(x) + \frac{1}{c}\int g(x)\,dx\right] + C, \\ \Psi(x) &= \frac{1}{2}\left[f(x) - \frac{1}{c}\int g(x)\,dx\right] - C. \end{aligned}\right. \tag{21}$$

Statt mit x kann man nun das Argument beliebig anders bezeichnen. Setzt man nach Ausführung der Integrationen statt x in der ersten dieser Gleichungen $x + ct$, in der zweiten $x - ct$ ein, so erhält man die gesuchten Wellenfunktionen

$$\left\{\begin{aligned} \Phi(x + ct) &= \frac{1}{2}\left[f(x) + \frac{1}{c}\int g(x)\,dx\right]_{x = x + ct} + C, \\ \Psi(x - ct) &= \frac{1}{2}\left[f(x) - \frac{1}{c}\int g(x)\,dx\right]_{x = x - ct} - C. \end{aligned}\right. \tag{21a}$$

Bei der Bildung von u durch Addition der beiden Wellen fällt die Konstante C ganz weg, sie ist also belanglos und kann deswegen $= 0$ gesetzt werden.

Im allgemeinen sind Φ und Ψ beide von Null verschieden, es entstehen also im allgemeinen zwei nach entgegengesetzten Richtungen fortschreitende Wellen. Soll nur eine, etwa die nach $+x$ fortschreitende Ψ, entstehen, so muß, damit die andere, hier Φ, dauernd verschwindet, eine Beziehung zwischen $f(x)$ und $g(x)$,

d. h. zwischen Gestalt der Schwingungskurve und Geschwindigkeit der Teile, bestehen; nämlich in dem gewählten Beispiel

$$f(x) + \frac{1}{c}\int g(x)\,dx = -2C.$$

Durch Differentiation läßt sich diese Bedingung etwas umformen, und man erhält: es ist dauernd

$$\Phi = 0, \quad \text{wenn } g(x) = -cf'(x),$$
$$\Psi = 0, \quad \text{wenn } g(x) = +cf'(x)$$

ist. Im ersten Fall ist nur eine nach $+x$, im zweiten nur eine nach $-x$ fortschreitende Welle vorhanden. Die Fälle, in denen eine der beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ gleich Null ist, wo also zur Zeit Null die Saite — um diese als anschaulichstes Beispiel zu wählen — aus einer von der Ruhelage abweichenden Lage ohne Anfangsgeschwindigkeit losgelassen wird ($g = 0$) oder in der Ruhelage durch einen Stoß oder Schlag eine Geschwindigkeit erhält ($f = 0$), ergeben immer zwei nach $+x$ und $-x$ fortschreitende Wellen.

1. Fall: Gezupfte, d. h. ausgebogene und losgelassene Saite. Es ist $g(x) = 0$. Die beiden Wellen werden

$$(22) \qquad \Phi(x+ct) = \tfrac{1}{2}f(x+ct), \quad \Psi(x-ct) = \tfrac{1}{2}f(x-ct),$$

indem man, wie erlaubt, $C = 0$ setzt.

Das bedeutet: eine durch das Zupfen erzeugte Ausbiegung (Wellenberg) teilt sich in zwei gleichgestaltete, nach $+x$ und $-x$ fortschreitende Wellen von der halben Höhe des Berges (Fig. 8). Die Verrückung der Teilchen (Elongation) hat bei beiden dieselbe Richtung $+v$.

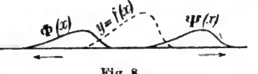


Fig. 8.
Teilung der Ausbiegung $y = f(x)$ in eine nach links fortschreitende Welle Φ und eine nach rechts fortschreitende Welle Ψ bei der gezupften Saite.

2. Fall: Geschlagene Saite. Es ist $f(x) = 0$. Die beiden Wellen werden, indem wieder $C = 0$ gesetzt wird,

$$(23) \qquad \begin{cases} \Phi(x+ct) = \left[\dfrac{1}{2c}\displaystyle\int g(x)\,dx\right]_{x=x+ct}; \\[2ex] \Psi(x-ct) = -\left[\dfrac{1}{2c}\displaystyle\int g(x)\,dx\right]_{x=x-ct}. \end{cases}$$

Das bedeutet auch die Entstehung zweier in der Form gleicher Wellen, die in entgegengesetzter Richtung laufen; nur sind die Verrückungen (Elongationen) der Saitenteilchen nach entgegengesetzten Richtungen ($+v$ und $-v$) gerichtet (Fig. 9). In dieser Darstellung ist der größeren Einfachheit wegen angenommen, daß das Integral $\int g(x)dx$ an den Enden des geschlagenen Stückes Null wird. Dazu ist nötig, daß die Geschwindigkeit $v' = g(x)$ der Saitenteilchen innerhalb dieses Stückes zum Teil positiv, zum Teil negativ gerichtet ist, und zwar so, daß die Flächenintegrale beider Teile dem absoluten Werte nach gleich sind. Bei dem Anschlag eines Hammers an die Saite (z. B. bei der Klaviersaite) ist diese Voraussetzung gerade nicht erfüllt, worauf hier zur Vermeidung von Mißverständnissen und Irrtümern aufmerksam gemacht werden soll. Ein solcher Schlag erzeugt nur Geschwindigkeiten nach einer Seite hin.

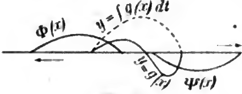


Fig. 9.
Entstehung der beiden Wellen Φ und Ψ auf der geschlagenen Saite bei spezieller Form des Schlages.

22. Berechnung von $\Phi(x+ct)$ und $\Psi(x-ct)$ für den einseitig begrenzten Stab (oder Saite). b) Einseitig, bei $x=0$, begrenzter Stab (Saite). Zu den in Nr. **21** abgeleiteten Sätzen kommen hier noch solche, welche aus der Berücksichtigung der Grenzbedingung bei $x=0$ hervorgehen. Die an diesem Punkt eintreffende Welle $\Phi(x+ct)$ wird reflektiert und zwar je nach der Art der Grenzbedingung in verschiedener Weise; an einem freien Stabende erfolgt die Reflexion ohne Phasenänderung, d. h. Wellenberg als Berg, Wellental als Tal; an einem festen (eingespannten) Stab- oder Saitenende mit Phasenumkehr, d. h. Wellenberg als Tal, Wellental als Berg.

Der Stab oder die Saite erstrecke sich von $x=0$ bis $x=+\infty$. Die Anfangsbedingungen, d. h. die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$, sind infolgedessen nur für Werte von x zwischen 0 und $+\infty$ gegeben.

Die Grenzbedingungen bei $x=0$ sind: $u=0$ für ein festes, $\frac{\partial u}{\partial x}=0$ für ein freies Ende.

1. Fall: festes Stab-(Saiten-)ende bei $x=0$. Aus der Grenzbedingung $u=0$ für $x=0$ folgt, wenn man in (17) Nr. **19** $x=0$ setzt, die für alle Zeiten gültige Bedingung,

$$(24) \qquad \Phi(ct) + \Psi(-ct) = 0, \quad \text{oder} \quad \Psi(-z) = -\Phi(z),$$

indem man das Argument statt durch ct allgemeiner durch den beliebig gewählten Buchstaben z ausdrückt. — Diese Gleichung in Verbindung mit (21) erlaubt, Φ und Ψ für alle vorkommenden Argumentwerte aus den Anfangsbedingungen zu berechnen.

Durch (21) allein sind Φ und Ψ hier nur für positive Argumentwerte bestimmt, da $f(x)$ und $g(x)$ nur für solche Werte gegeben sind. Man braucht aber Ψ auch für negative Argumente, da $x - ct$ für hinreichend große Werte der Zeit t bei jedem Werte x schließlich negativ wird. Φ dagegen enthält bei positivem t nur positive Argumente $x + ct$. Will man jedoch in die Vergangenheit zurückgehen — etwa um zu sehen, wie der angenommene Anfangszustand seinerseits wieder durch Übereinanderlagerung von Wellen entstanden ist —, so braucht man auch Φ mit negativen Argumentwerten. Dazu dient ebenfalls (24), indem man daselbst t bzw. z negative Werte beilegt.

Physikalisch betrachtet ist der Vorgang folgender: Die zur Zeit $t = 0$ vorhandene, auf irgend eine Weise entstandene Welle $\Psi(x - ct)$ schreitet nach rechts $(+x)$ hin unverändert und unbehindert fort, indem immer diejenigen Stücke des Stabes oder der Saite von der Bewegung ergriffen werden, für welche das Argument $x - ct$ zu der betreffenden Zeit innerhalb des Intervalles liegt, in dem die Funktionen f und g bezw. eine von ihnen von Null verschiedene Werte haben.

Die zur Zeit $t = 0$ vorhandene Welle $\Phi(x + ct)$ schreitet ebenso nach links $(-x)$ fort, bis sie den Punkt $x = 0$ erreicht. Dort wird sie reflektiert, d. h. in eine Welle Ψ umgewandelt, die die Form der bisherigen Welle Φ hat, jedoch mit negativen Ordinaten [vgl. (24)], und die nun nach rechts $(+x)$ hin fortschreitet. Die nach links laufende Welle Φ scheidet damit aus, und es bestehen nunmehr zwei nach rechts $(+x)$ hintereinander herlaufende Wellen Ψ, die vordere von der ursprünglich vorhandenen Ψ-Form, die nachfolgende von der (umgekehrten) Form der ursprünglichen Φ-Welle.

Man kann sich das Verhalten einfach veranschaulichen, wenn man sich die Saite (den Stab) über $x = 0$ hinaus nach $-\infty$ hin fortgesetzt denkt. Die nach links laufende Φ-Welle tritt dann bei $x = 0$ auf diesen gedachten negativen Teil über, scheidet also aus dem reellen System aus; dagegen tritt, von der gedachten negativen Verlängerung herkommend, eine Welle auf die Saite über, welche

die Form der verschwundenen Φ-Welle besitzt, jedoch gespiegelt in bezug auf die y-Achse und auch die x-Achse (vgl. die Fig. 10).

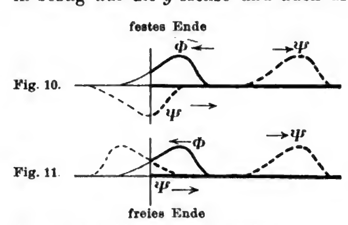


Fig. 10: Negative Reflexion an festem,
Fig. 11: Positive Reflexion an freiem Ende eines Stabes.
Ausgezogene Kurve ——: nach links laufende Φ-Welle.
Gestrichelte Kurve ------: nach rechts laufende Ψ-Welle.

Die Übereinanderlagerung der ankommenden Welle Φ und der reflektierten Welle Ψ (mit negativen Ordinaten) ergibt an der Stelle $x = 0$ dauernd Ruhe, wie man auch aus der Figur sofort ersieht.

2. Fall: Freies Stabende bei $x = 0$. Die Grenzbedingung ist $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ für $x = 0$. Unter Zugrundelegung derselben ergibt sich aus der nach x differentiierten Gl. (17) in Nr. 19

$$(25) \qquad \Phi'(ct) + \Psi'(-ct) = 0 \quad \text{oder} \quad \Psi'(-z) = -\Phi'(z).$$

Durch Integration folgt daraus

$$(26) \qquad \Psi(-z) = +\Phi(z).$$

Diese Gleichung, welche Gl. (24) entspricht, zeigt, daß im Gegensatz zu dort die Reflexion ohne Phasenumkehr erfolgt, also Wellenberg als Berg, Wellental als Tal (positive Reflexion). Für die beim Überschreiten des Punktes $x = 0$ ausscheidende Welle $\Phi(x + ct)$ tritt eine an Form gleiche, nur in bezug auf die y-Achse gespiegelte Welle $\Psi(x - ct)$, die nach wachsenden x hin fortschreitet, auf den Stab über (Fig. 11).

23. Berechnung von $\Phi(x + ct)$ und $\Psi(x - ct)$ für den beiderseits begrenzten Stab (oder Saite). c) Beiderseitig, bei $x = 0$ und $x = l$, begrenzter Stab (Saite). Für die Anfangsbedingungen, also die Form der Wellen, bleiben die früheren Sätze (vgl. Nr. 21) in Kraft. Die räumlichen Grenzbedingungen ergeben hier an beiden Enden Reflexionen, so daß die einmal erzeugten Wellen dauernd über den Stab (die Saite) hin und zurück laufen.

Sind die Grenzbedingungen an beiden Enden gleichartig (d. h. sind beide Enden fest oder beide Enden frei), so wiederholt

sich offenbar jeder Vorgang genau in der ursprünglichen Form, nachdem die Welle an beiden Enden je einmal reflektiert worden ist, also die Stablänge l zweimal durchmessen hat. Man braucht sich nur das Bild der reflektierten Welle zu vergegenwärtigen, um dies zu erkennen. In Fig. 12 sind die einzelnen Phasen, die Hin- und Hergänge einer Welle, bis sie wieder die ursprüngliche Form und Richtung hat, dargestellt. Diese Phasen, hier zwei, sind mit den Zahlen 1 und 2 bezeichnet. Die nach links gehende Wellenphase, Φ, ist durch eine ausgezogene Kurve, die nach rechts gehende, Ψ, druch eine gestrichelte dargestellt. Alle Vorgänge sind also in diesen beiden Fällen periodisch, und zwar mit der räumlichen Periode $2l$, der doppelten Stablänge. Die zeitliche Periode ist $T=\frac{2l}{c}$; das ist die Zeit, in welcher die Welle mit der Geschwindigkeit c die Strecke $2l$ durchläuft.

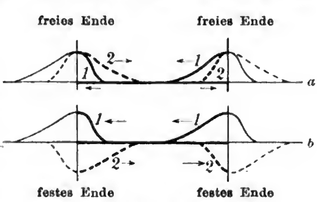


Fig. 12.
Hin- und Hergang einer Welle über einen beiderseitig begrenzten Stab mit einmaliger Reflexion an jedem Stabende.
a: Stab mit 2 freien Enden,
b: Stab mit 2 festen Enden.

Sind die Grenzbedingungen an beiden Enden ungleichartig, d. h. ist ein Ende fest, das andre frei, so findet an jenem negative, an diesem positive Reflexion statt, und das bewirkt, daß sich jeder Vorgang erst nach vier Reflexionen, je zwei an jedem Ende, vollkommen genau wiederholt (vgl. Fig. 13, für die das bei der vorigen Figur Gesagte gilt; nur sind hier vier Phasen zu unterscheiden). Hier ist also die räumliche Periode doppelt so lang, nämlich gleich der vierfachen Stablänge $4l$. Die zeitliche Periode ist $T=\frac{4l}{c}$, also

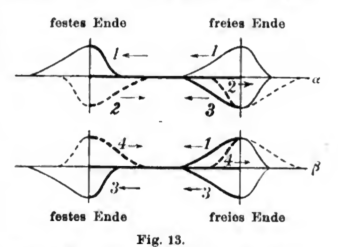


Fig. 13.
Hin- und Hergang einer Welle über einen beiderseitig begrenzten Stab mit zweimaliger Reflexion an jedem Ende; links festes, rechts freies Ende.
α: die beiden ersten,
β: die beiden letzten Phasen des Vorganges.

auch doppelt so groß wie im vorigen Falle. Das bedeutet, daß die (Grund-)Schwingung eines solchen Systems doppelt so langsam erfolgt, wie die eines Stabes oder einer Saite mit zwei gleich beschaffenen Enden (vgl. auch Nr. **25**).

Das Spiel der hin und her laufenden Welle, die an den Punkten $x = 0$ und $x = l$ reflektiert wird, läßt sich darstellen, indem man sich zwei gegeneinanderlaufende Wellenzüge denkt, von denen der eine nach $+x$, der andere nach $-x$ fortschreitet, und deren Übereinanderlagerung innerhalb der Strecke $x = 0$ bis $x = l$ den Schwingungszustand daselbst ergibt. Im ersten Fall (beide En-

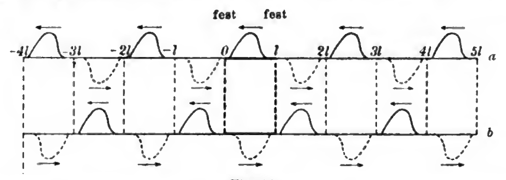


Fig. 14.
Modell zur Veranschaulichung der Wellenbewegung auf einem beiderseits fest eingespannten Stab (Saite) zwischen *0* und *l*. Die ausgezogenen Wellen laufen nach links, die gestrichelten nach rechts.

***a* und *b* sind die beiden entgegengesetzten Phasen des Vorganges.**

den fest oder beide Enden frei) ist die Welle periodisch mit der Länge $2l$, d. h. es ist immer derselbe Zustand vorhanden innerhalb der Felder $x = 0$ bis $x = l$, $x = 2l$ bis $3l$, $4l$ bis $5l$ usw. und auf der negativen Seite zwischen $-l$ und $-2l$, $-3l$ und $-4l$ usw.; der zu dem vorigen spiegelbildliche Zustand (vgl. Nr. **22** und Fig. 10) ist vorhanden auf den Strecken l bis $2l$, $3l$ bis $4l$ usw., 0 bis $-l$, $-2l$ bis $-3l$ usw. Die erstgenannten Wellen schreiten nach der einen Richtung (etwa nach links), die letztgenannten nach der entgegengesetzten, also nach rechts hin fort (Fig. 14). Dieses Modell veranschaulicht die Bewegung der direkten und reflektierten Welle Φ im Gebiet von $x = 0$ bis $x = l$. Gleichzeitig kann aber natürlich noch eine Welle Ψ vorhanden sein, die von $t = 0$ an in diesem Gebiet nach $+x$ hin läuft und ganz entsprechende Reflexionen an den Enden erleidet. Diese Ψ-Welle wird durch ein ähnliches Modell veranschaulicht, nur ist hier die ursprüngliche Bewegung nach $+x$ (rechts), die reflektierte nach $-x$ (links) hin gerichtet. Beide Wellen, Φ und Ψ, zusammen mit ihren reflektierten Wellen, geben die allgemeinste Bewegung, die überhaupt möglich ist.

Sind Φ und Ψ Sinuswellen von gleicher Amplitude, so ergibt sich als Resultat der Übereinanderlagerung beider Wellenzüge die stehende sinusförmige Schwingung der Saite oder des Stabes mit Knoten bezw. Bäuchen an den Enden (und eventuell einem oder mehreren Knoten und Bäuchen im Innern der Saitenlänge), wenn die halbe Wellenlänge — der Wellenberg oder das Wellental — gleich der Stablänge (Saitenlänge) l oder einem ganzzahligen Submultiplum derselben $\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{3} \text{ usw.}\right)$ ist. Vgl. Fig. 15.

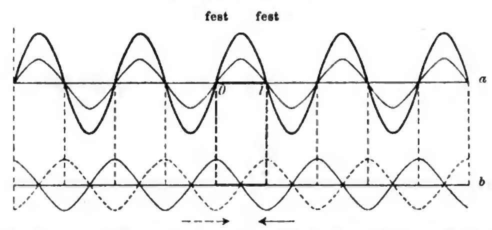


Fig. 15. Modell zur Wellenbewegung wie in Fig. 14 mit Sinuswellen. Bildung stehender Wellen mit Knoten an beiden Enden ($x = 0$ und $x = l$).

Phase a: Maximale Elongation der resultierenden Schwingung (stark ausgezogene Kurve); die erzeugenden Wellen fallen genau übereinander.

Phase b: Elongation Null der resultierenden Schwingung; die erzeugenden Wellen (nach links laufende ausgezogen, nach rechts laufende gestrichelt) haben überall entgegengesetzte Elongation.

Durch Übereinanderlagerung verschiedener Sinuswellen, deren Länge $2l$, l, $\frac{2l}{3}$, $\frac{l}{2}$ usw. ist, also im Verhältnis der ganzen Zahlen abnimmt, kann man beliebig geformte stehende Wellen erhalten; denn diese Übereinanderlagerung stellt, mathematisch betrachtet, in jedem Augenblick eine Fouriersche Reihe dar.

Im zweiten Fall (ein Ende fest, das andere frei) ist die Welle periodisch mit der Periode $4l$, d. h. es ist immer derselbe Zustand in bezug auf Form und Fortschreitungsrichtung der Welle vorhanden in den Feldern $x = 0$ bis $x = l$, $x = 4l$ bis $5l$, $8l$ bis $9l \ldots$, $-3l$ bis $-4l$, $-7l$ bis $-8l$ usw., kurz immer in den um $4l$ voneinander entfernten Feldern. Das entsprechende gilt für die anderen Felder, und zwar sind nach dem oben Gesagten und in der Fig. 13 Dargestellten für jede Welle vier verschiedene Zustände zu unterscheiden, von denen zwei als Wellen nach rechts, zwei nach links fortschreiten. Die Verteilung auf die

Tabelle 2.

Bewegungsrichtung der Welle nach		nach	
links	rechts	links	rechts
1. Phase	4. Phase	3. Phase	2. Phase
0 bis l	l bis $2l$	$2l$ bis $3l$	$3l$ bis $4l$
$4l$ „ $5l$	$5l$ „ $6l$	$6l$ „ $7l$	$7l$ „ $8l$
$8l$ „ $9l$	$9l$ „ $10l$	$10l$ „ $11l$	$11l$ „ $12l$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
$-3l$ bis $-4l$	$-2l$ bis $-3l$	$-l$ bis $-2l$	0 bis $-l$
$-7l$ „ $-8l$	$-6l$ „ $-7l$	$-5l$ „ $-6l$	$-4l$ „ $-5l$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

einzelnen Felder ergibt sich aus Tabelle 2 und Fig. 16. Die vier Phasen der Erscheinung, die durch das Übereinanderhinlaufen der vier Wellenzüge entstehen, sind untereinander dargestellt. Hierbei ist wieder nur die (auf der Strecke 0 bis l) ursprünglich nach links

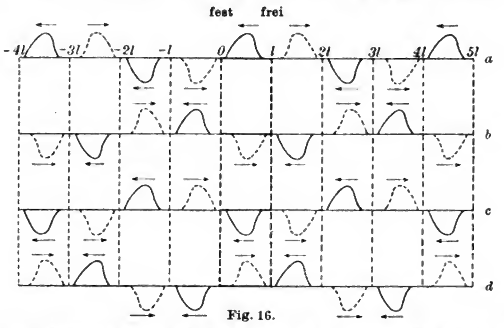


Fig. 16.

Modell zur Veranschaulichung der Wellenbewegung auf einem links festen, rechts freien Stab zwischen 0 und l.
a, b, c, d sind die 4 verschiedenen Hauptphasen. Bezeichnung wie bei Fig. 14.

$(-x)$ laufende Φ-Welle berücksichtigt, die infolge der Reflexionen außerdem zweimal als nach rechts laufende Ψ-Welle und noch einmal als nach links laufende Φ-Welle erscheint. Außer dieser Welle kann noch eine ursprünglich nach rechts laufende Ψ-Welle vorhanden sein, die durch Reflexion zweimal zu einer nach links laufenden Φ-Welle und ein drittes Mal zu einer nach rechts laufenden Ψ-Welle wird. Beide Wellen können ganz verschiedene Gestalt haben. Ihre Phasen ordnen sich offenbar so in die Felder des Bewegungsmodells ein, daß in jedem Feld eine nach rechts und eine nach links schreitende Welle vorhanden sind.

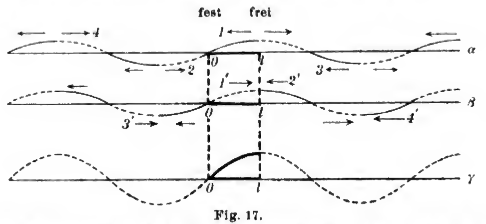


Fig. 17.
Modell zur Wellenbewegung wie in Fig 16 mit Sinuswellen. Bildung stehender Wellen mit einem Knoten am linken Stabende ($x = 0$) und einem Bauch am rechten Ende ($x = l$).

Sind beide Wellenzüge Sinuswellen von gleicher Länge (Periode) und Amplitude, so fügen sich ihre einzelnen Phasen zu zwei in entgegengesetzter Richtung übereinander fortschreitenden Sinuslinien zusammen, die wie im vorigen Fall eine stehende Schwingung ergeben; nur treffen hier die Phasen immer so zusammen, daß am festen Ende $(x = 0)$ ein Bewegungsknoten, am freien Ende $(x = l)$ ein Bauch entsteht. Damit dies zutrifft und die entstehenden Sinuslinien glatte Kurven ohne Knicke und Unstetigkeiten werden, muß auf die Länge l ein ungerades Vielfaches der Viertelwellenlänge der Sinuswelle kommen (Fig. 17). Diese Figur zeigt in α zwischen 0 und l den einen Wellenzug Φ, der mit den auf der gedachten Verlängerung des Stabes l fortschreitenden zugehörigen Wellen 2, 3, 4 die ursprünglich nach links gerichtete Welle Φ darstellt; ebenso in β die ursprünglich nach rechts gerichtete Ψ-Welle. Beide superponieren sich und setzen die stark ausgezogene stehende Schwingung zusammen, die in γ in der ersten, der Wellenstellung α und β entsprechenden Phase gezeichnet ist; es ist die Phase der maximalen Elongation. Die nur gedachten, außerhalb der Stablänge

gelegenen Wellenteile sind in γ punktiert gezeichnet. Die stehende Schwingung hat hier am festen Ende $x = 0$ einen Knoten, am freien Ende $x = l$ einen Bauch.

24. Integration der Bewegungsgleichungen nach D. Bernoulli. Partikularintegrale. Normalfunktionen. Lösung von Daniell Bernoulli durch Zerspaltung. Diese Lösung ist nur auf beiderseits begrenzte Stäbe oder Saiten anwendbar, wie sie ja in Wirklichkeit auch immer vorliegen. Es soll eine Lösung gefunden werden, welche der Differentialgleichung und den (räumlichen) Grenzbedingungen genügt. Der Anfangszustand (d. h. Lage und Geschwindigkeit der Teilchen zur Zeit $t = 0$) soll vorläufig unberücksichtigt bleiben.

Die Integration gelingt mittels der Methode der Partikulärintegrale durch Zerspalten der partiellen Differentialgleichung (13) in Nr. **18** in zwei gewöhnliche ebenfalls lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung. Man nimmt nämlich versuchsweise an, daß das Integral sich als Produkt zweier Funktionen darstellt, von denen die eine nur von x, die andere nur von t abhängt, und erhält damit eine brauchbare Lösung, wodurch die Berechtigung jenes Ansatzes erwiesen ist. Man setzt

$$u = u^{(x)} \cdot u^{(t)}, \tag{27}$$

wobei die Funktion $u^{(x)}$ nur von x, $u^{(t)}$ nur von t abhängt. Durch Einsetzen des Wertes von (27) in Gl. (13) erhält man nach einfachsten Umformungen

$$\frac{1}{u^{(t)}} \cdot \frac{d^2 u^{(t)}}{d t^2} = \frac{c^2}{u^{(x)}} \cdot \frac{d^2 u^{(x)}}{d x^2}. \tag{28}$$

Links steht jetzt eine Funktion nur von t, rechts eine solche nur von x. Die Gleichung muß für alle möglichen Werte von x und t gelten. Das ist nur erfüllbar, wenn beide Seiten konstant, und zwar gleich einer und derselben Konstanten sind, die wir $-n^2$ nennen wollen. Daraus ergeben sich die beiden gewöhnlichen, einander in der Form gleichen und mit der in Bd. I Nr. **24** behandelten Gleichung (11a) identischen Differentialgleichungen

$$\frac{d^2 u^{(t)}}{dt^2} = -n^2 u^{(t)}, \quad \frac{d^2 u^{(x)}}{dt^2} = -\frac{n^2}{c^2} u^{(x)}. \tag{29}$$

Partikuläre Integrale, d. h. Integrale ohne Integrationskonstanten sind

$$(30)\qquad u^{(t)} = \begin{cases} \sin nt \\ \cos nt \end{cases}, \qquad u^{(x)} = \begin{cases} \sin \dfrac{nx}{c} \\ \cos \dfrac{nx}{c} \end{cases}.$$

Aus diesen lassen sich durch geeignete Kombinationen nach (27) Lösungen u bilden, welche die in Nr. **20** aufgezählten Grenzbedingungen erfüllen, wenn man der vorläufig noch unbestimmt gelassenen Konstante n passende Werte gibt. Folgende vier Kombinationen sind möglich

$$(30\text{a})\qquad \begin{cases} \sin \dfrac{nx}{c} \sin nt, & \cos \dfrac{nx}{c} \sin nt \\ \sin \dfrac{nx}{c} \cos nt, & \cos \dfrac{nx}{c} \cos nt. \end{cases}$$

Die untereinanderstehenden Paare unterscheiden sich nur in der Phase, nicht in der Form; die nebeneinander stehenden Paare haben gleiche Phase, aber verschiedene Form. Jede der vier Kombinationen kann mit einer (beliebigen) konstanten Amplitude multipliziert werden. Die Schwingungen, die hierdurch dargestellt werden, sind ungedämpfte sinusförmige oder einfach pendelförmige mit der Kreisfrequenz n (Frequenz $\frac{n}{2\pi}$ in 1 Sekunde). Die Sinusform gilt sowohl mit bezug auf die Zeit, wie auf die Koordinate x. Die Sinusform der Zeitfunktion bedeutet, daß der der Schwingung entsprechende Ton rein ist (ohne Obertöne); die Sinusform bei der Abhängigkeit von der Länge x bedeutet, daß die Verrückungen, graphisch als Funktion der Koordinaten x der Saiten- bezw. Stabquerschnitte aufgetragen, zu jeder Zeit t eine Sinuslinie ergeben. Am anschaulichsten ist das bei den Transversalschwingungen der Saite, wo diese Sinuslinie unmittelbar in der Gestalt der schwingenden Saite zutage tritt.

Die Funktionen $u^{(x)}$, welche nach Abtrennung des Zeitfaktors $u^{(t)}$ übrig bleiben, sind die „Normalfunktionen" oder „Eigenfunktionen" der schwingenden Saite (bezw. des Stabes). Wie aus der folgenden Nr. **25** hervorgeht, gibt es unendlich viele solche Funktionen verschiedener Ordnung, da zu jedem der unendlich vielen Werte der Eigenfrequenz n_k, d. h. zu jedem Werte der Ordnungszahl k zwei konjugierte Normalfunktionen (hier z. B. $\sin n_k x$ und $\cos n_k x$) gehören, die beide partikuläre Integrale derselben Differentialgleichung sind.

Derartige „Normalfunktionen“ bestehen für jeden schwingungsfähigen Körper (Saite, Stab, Platte, gasgefüllten Hohlraum usw.), und zwar stets in unendlicher Zahl. Es sind immer die partikulären Integrale der für den Körper charakteristischen Differentialgleichung, welche nach Abspaltung des Zeitfaktors übrig bleibt. Aus der Form der in Betracht kommenden Differentialgleichungen lassen sich zwei wichtige Sätze über die Normalfunktionen ableiten, die als Orthogonalitätsbedingungen (oder Integraleigenschaften) derselben bezeichnet werden. Sind h und k zwei Ordnungszahlen, u und v zwei konjugierte Normalfunktionen, d. h. zwei verschiedenartige (voneinander unabhängige) partikuläre Integrale derselben Differentialgleichung (im obigen Beispiel die Sinus- und die Kosinusfunktion), so gilt bei Integration über den ganzen Körper

$$\int u_h(x) \cdot v_k(x)\, dx = 0 \qquad h \gtreqless k. \tag{31}$$

$$\int u_h(x) u_k(x)\, dx = \begin{cases} 0, & \text{wenn } h \neq k \\ \text{konst}, & \text{wenn } h = k. \end{cases} \tag{31a}$$

Der konstante Wert in (31a) für $h = k$ kann gleich 1 gemacht werden, indem man alle Normalfunktionen mit einem passenden Faktor versieht. Ähnliche Formeln gelten, wenn die Normalfunktionen von zwei oder mehr Variablen $x, y, z \ldots$ abhängen.

25. Berechnung der Eigenfrequenzen n. Die zulässigen Werte der Schwingungsfrequenz n sind je nach den Grenzbedingungen verschieden. In jedem Falle aber ergibt sich nicht nur ein Wert, sondern eine unendliche Reihe getrennter (diskreter) Werte, und damit eine entsprechende Reihe möglicher Schwingungen desselben Systems, die als Partialschwingungen (Teilschwingungen) oder als Grundschwingung und Oberschwingungen, musikalisch als Grundton und Obertöne, bezeichnet werden.

Der Stab oder die Saite habe die Länge l und erstrecke sich von $x = 0$ bis $x = l$.[1])

1) Legt man den Koordinatenanfangspunkt anderswo hin, z. B. in die Stabmitte, so erstreckt sich der Stab von $-\frac{l}{2}$ bis $+\frac{l}{2}$, und man muß — bei denselben Grenzbedingungen — $\cos\frac{nx}{c}$ statt $\sin\frac{nx}{c}$ nehmen und umgekehrt. Die Werte der Schwingungsfrequenzen n werden aber dadurch nicht geändert.

Ist die Grenzbedingung für das Ende $x=0$ die, daß keine Verrückung daselbst stattfinden, also u bzw. v, w oder ψ gleich Null sein soll, so genügt nur ein Integral u usw. mit $\sin\frac{nx}{c}$ als Faktor dieser Forderung, da $\cos\frac{nx}{c}$ für $x=0$ niemals Null werden kann.

Soll nun weiter am andern Ende bei $x=l$ ebenfalls u (bzw. v, w, ψ) $=0$ sein, so muß $\sin\frac{nl}{c}=0$ sein, welche Bedingung eine — hier sehr einfache — transzendente Gleichung zur Bestimmung von n darstellt. Sie ergibt aufgelöst für n die Reihe von Werten

$$n=2k\frac{\pi c}{2l}, \quad (k=1,2\ldots\infty) \tag{32}$$

Soll dagegen am andern Ende bei $x=l$ zur gleichen Zeit nicht u, sondern $\frac{\partial u}{\partial x}=0$ sein, so muß $\frac{n}{c}\cos\frac{nx}{c}$ für $x=l$ verschwinden, woraus für n die Wertereihe folgt:

$$n=(2k-1)\frac{\pi c}{2l} \quad (k=1,2\ldots) \tag{33}$$

Dieselben Werte n wie in (33) erhält man, wenn bei $x=0$ $\frac{\partial u}{\partial x}=0$ und bei $x=l$ $u=0$ sein soll, wenn also festes und bewegliches Ende vertauscht werden. Dieselben Werte n wie in (32) ergeben sich, wenn an beiden Enden nicht u, sondern $\frac{\partial u}{\partial x}=0$ sein soll. Nur tritt im Integral u nicht $\sin\frac{nx}{c}$ sondern $\cos\frac{nx}{c}$, also eine andere Normalfunktion als Faktor auf. Allgemein gilt also die Wertereihe (32) für n, wenn die Grenzbedingungen an beiden Enden gleich, dagegen die Reihe (33), wenn sie an beiden Enden verschieden sind.

Der Wert n für $k=1$ entspricht der Grundschwingung oder 1. Partialschwingung, die folgenden gehören der 2., 3., ... usw. Partialschwingung oder, in andrer Bezeichnung, der 1., 2., usw. Oberschwingung an.

26. Vollständige Lösungen, Schwingungsfiguren und Frequenzen der Partialschwingungen. Die Schwingungsfigur, insbesondere Lage und Anzahl der Knoten und Bäuche ergibt sich in jedem Einzelfall aus dem partikulären Integral der Lösung d. h. aus der zugehörigen Normalfunktion; mit wachsender Ord-

nungszahl k der Partialschwingung wächst die Zahl der Knoten und Bäuche. Allgemein gilt in jedem Falle: bei den Grenzbedingungen, welche zu (33) führen, sind gleich viel Knoten und Bäuche vorhanden, bei den Bedingungen, welche auf (32) führen, ist die Zahl der Knoten um eins größer oder kleiner als die der Bäuche. Das Nähere ergibt sich aus der Behandlung einzelner Fälle auf Grund der in Nr. 20 aufgestellten Grenzbedingungen.

I. Longitudinalschwingungen von Stäben.

1. Beide Enden (bei $x=0$ und $x=l$) fest. Die Grenzbedingungen sind

$$u=0 \text{ für } x=0 \text{ und } x=l. \tag{34}$$

Zulässige Lösungen sind also

$$u_k=\begin{cases} A_k' \sin\frac{n_k x}{c}\sin n_k t, \\ A_k'' \sin\frac{n_k x}{c}\cos n_k t, \end{cases} \quad \text{für } n_k=\frac{k\pi c}{l}, \quad (k=1,2\ldots). \tag{35}$$

Aus beiden läßt sich, da die Differentialgleichung (13) Nr. 18 linear ist, durch Superposition eine neue mit beliebig wählbarer Phasenkonstante ϑ_k ableiten

$$u_k=(A_k'\sin n_k t+A_k''\cos n_k t)\sin\frac{n_k x}{c}=A_k\sin\frac{n_k x}{c}\sin(n_k t+\vartheta_k), \tag{35a}$$

wobei

$$\begin{cases} A_k=\sqrt{A_k'^2+A_k''^2}, & \operatorname{tg}\vartheta_k=\frac{A_k''}{A_k'}, \\ \sin\vartheta_k=\frac{A_k''}{\sqrt{A_k'^2+A_k''^2}}, & \cos\vartheta_k=\frac{A_k'}{\sqrt{A_k'^2+A_k''^2}} \end{cases} \tag{36}$$

ist. Die Phase, überhaupt die ganze Zeitfunktion ist nebensächlich, wenn man nur die räumliche Form der Schwingung, die Gestalt der Schwingungskurve bestimmen will. Diese wird durch den Faktor $\sin\frac{n_k x}{c}$, die Normalfunktion, gegeben. Man erhält, wenn man ihn gleich Null setzt, mit Rücksicht auf die Werte von n die in Tabelle 3 angegebenen Lagen der Knoten ($u_k=0$) und Bäuche (u_k maximal veränderlich). Dieselben Lagen haben die Knoten und Bäuche der Geschwindigkeit $\frac{\partial u_k}{\partial t}$. Dagegen sind die Knoten und Bäuche der Dilatationen $\frac{\partial u}{\partial x}$, des Druckes p und der Dich-

Tabelle 3.
Lage der Knoten und Bäuche der Verrückung, Geschwindigkeit, Dilatation und Dichteänderung.

Ordnungszahl der Partialschwingung k	Verrückung u und Geschwindigkeit $\frac{\partial u}{\partial t}$	beiderseits fester Stab (Longitudinalschw.), oder Saite (Longitudinal- und Transversalschw.), oder beiderseits geschlossene Gassäule (Longitudinalschw.)	Dilatation $\frac{\partial u}{\partial x}$ und Dichteänderung $\frac{\partial \varrho}{\partial t}$
1	Knoten	$0 \quad l$	Bauch
	Bauch	$\frac{l}{2}$	Knoten
2	Knoten	$0 \quad \frac{2l}{4} \quad l$	Bauch
	Bauch	$\frac{l}{4} \quad \frac{3l}{4}$	Knoten
3	Knoten	$0 \quad \frac{2l}{6} \quad \frac{4l}{6} \quad l$	Bauch
	Bauch	$\frac{l}{6} \quad \frac{3l}{6} \quad \frac{5l}{6}$	Knoten
4	Knoten	$0 \quad \frac{2l}{8} \quad \frac{4l}{8} \quad \frac{6l}{8} \quad l$	Bauch
	Bauch	$\frac{l}{8} \quad \frac{3l}{8} \quad \frac{5l}{8} \quad \frac{7l}{8}$	Knoten
5	Knoten	$0 \quad \frac{2l}{10} \quad \frac{4l}{10} \quad \frac{6l}{10} \quad \frac{8l}{10} \quad l$	Bauch
	Bauch	$\frac{l}{10} \quad \frac{3l}{10} \quad \frac{5l}{10} \quad \frac{7l}{10} \quad \frac{9l}{10}$	Knoten
	Dilatation $\frac{\partial u}{\partial x}$ und Dichteänderung $\frac{\partial \varrho}{\partial t}$	beiderseits freier Stab (Longitudinalschw.) oder beiderseits offene Gassäule (Longitudinalschw.)	Verrückung u und Geschwindigkeit $\frac{\partial u}{\partial t}$

te ϱ, sowie der Änderungsgeschwindigkeiten $\frac{\partial p}{\partial t}$ und $\frac{\partial \varrho}{\partial t}$ dieser beiden Größen gegen jene verschoben, und zwar fallen offenbar die Knoten der Dichteänderungen mit den Bäuchen der Verrückung und Geschwindigkeit, die Bäuche mit den Knoten derselben zusammen, da $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{n_k}{c} \cos \frac{n_k x}{c}$ ist und der Kosinus seine Nullstellen und Extremwerte gerade in der Mitte zwischen denen des Sinus besitzt.

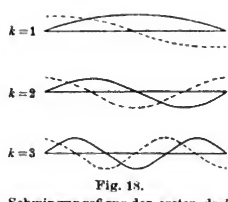


Fig. 18.
Schwingungsfigur der ersten drei Partialschwingungen.
Ausgezogene Kurve ———: Verrückung bzw. Geschwindigkeit bei fest-festem Stab (Saite), Dichte- und Druckänderung bei frei-freiem Stab.
Gestrichelte Kurve ------: Dichte- und Druckänderung bei fest-festem Stab (Saite), Verrückung bzw. Geschwindigkeit bei frei-freiem Stab.

Diese Beziehungen folgen aus der Gl. (2) in Nr. 16, sowie der Überlegung, daß Druck und Dichte einander immer parallel gehen, daß also mit wachsendem Druck auch die Dichte zunimmt usw. Die Tabelle gibt ihre Lage in der rechten Randkolumne, während für die Verrückung und Geschwindigkeiten die linke Randkolumne gilt. Beide Male ist die Tabelle von oben her zu lesen (vgl. weiter unten). Fig. 18 stellt für die Verrückung und die Dilatation die Schwingungsfiguren der drei ersten Partialschwingungen dar. Die Schnittpunkte dieser Kurven mit der Abszissenachse sind die Knotenpunkte.

2. Beide Enden des Stabes (bei $x=0$ und $x=l$) frei. Grenzbedingungen sind

$$(37)\qquad \frac{\partial u}{\partial x}=0 \quad \text{für} \quad x=0 \quad \text{und} \quad x=l.$$

Zulässige Lösungen sind

$$(38)\qquad u_k=\begin{cases} B_k' \cos\dfrac{n_k x}{c} \sin n_k t \\ B_k'' \cos\dfrac{n_k x}{c} \cos n_k t \end{cases} \quad \text{für} \quad n_k=\frac{k\pi c}{l}, \qquad (k=1,2\ldots).$$

Auch hier läßt sich wieder eine Lösung mit willkürlicher Phasenkonstante ϑ_k' ableiten

$$(38\text{a})\qquad u_k=(B_k'\sin n_k t+B_k''\cos n_k t)\cos\frac{n_k x}{c}=B_k\cos\frac{n_k x}{c}\sin(n_k t+\vartheta_k'),$$

wobei

$$(39)\qquad \begin{cases} B_k=\sqrt{B_k'^2+B_k''^2}, & \operatorname{tg}\vartheta_k'=\dfrac{B_k''}{B_k'}, \\ \sin\vartheta_k'=\dfrac{B_k''}{\sqrt{B_k'^2+B_k''^2}}, & \cos\vartheta_k'=\dfrac{B_k'}{\sqrt{B_k'^2+B_k''^2}} \end{cases}$$

ist. Die Lage der Knoten und Bäuche ist hier gewissermaßen reziprok zu derjenigen des vorigen Falles. Sie sind in Tabelle 3 auch mit enthalten, wenn man nicht die Spaltenüberschriften,

sondern die Unterschriften benutzt, die Tabelle also von unten nach oben liest.

3. Ein Ende des Stabes fest, das andre frei.

a) Es sei das Ende bei $x=0$ fest, das bei $x=l$ frei. Die Grenzbedingungen sind

$$(40)\qquad u=0 \quad \text{für} \quad x=0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}=0 \quad \text{für} \quad x=l.$$

Zulässige Lösungen sind hier

$$(41)\qquad u_k=\begin{cases} C_k' \sin\frac{n_k x}{c}\sin n_k t \\ C_k'' \sin\frac{n_k x}{c}\cos n_k t \end{cases} \quad \text{für} \quad n_k=\frac{(2k-1)\pi c}{2l}, \quad (k=1,2\ldots),$$

bzw. die allgemeinere aus beiden vereinigte

$$(41\text{a})\quad u_k=(C_k'\sin n_k t+C_k''\cos n_k t)\sin\frac{n_k x}{c}=C_k\sin\frac{n_k x}{c}\sin(n_k t+\vartheta_k'').$$

b) Es sei das Ende bei $x=0$ frei, das bei $x=l$ fest. Grenzbedingungen sind

$$(42)\qquad \frac{\partial u}{\partial x}=0 \quad \text{für} \quad x=0, \quad u=0 \quad \text{für} \quad x=l.$$

Zulässige Lösungen sind

$$(43)\qquad u_k=\begin{cases} D_k' \cos\frac{n_k x}{c}\sin n_k t \\ D_k'' \cos\frac{n_k x}{c}\cos n_k t \end{cases} \quad \text{für} \quad n_k=\frac{(2k-1)\pi c}{2l}, \quad (k=1,2\ldots),$$

bzw.

$$(43\text{a})\quad u_k=(D_k'\sin n_k t+D_k''\cos n_k t)\cos\frac{n_k x}{c}=D_k\cos\frac{n_k x}{c}\sin(n_k t+\vartheta_k''').$$

C_k, ϑ_k'', D_k, ϑ_k''' sind durch Gleichungen analog (36) und (39) gegeben, wenn man darin A_k bzw. B_k durch C_k und D_k, ϑ_k bzw. ϑ_k' durch ϑ_k'' und ϑ_k''' ersetzt. Die Lösungen 3a) und 3b) unterscheiden sich nur in der Form der Normalfunktionen $\sin\frac{n_k x}{c}$ und $\cos\frac{n_k x}{c}$, die als Faktoren auftreten. Die Lagen der Knoten und Bäuche sind aus der Tabelle 4 zu entnehmen, die analog der vorigen eingerichtet ist. Fig. 19 stellt wie Fig. 18 die Schwingungsfiguren und die Lage der Knoten und Bäuche dar.

Tabelle 4.

Lage der Knoten und Bäuche der Verrückung, Geschwindigkeit, Dilatation und Dichteänderung.

Ordnungszahl der Partialschwingung k	Verrückung u und Geschwindigkeit $\frac{\partial u}{\partial t}$	bei 0 fester, bei l freier Stab (Longitudinalschw.) oder bei 0 geschlossene, bei l offene Gassäule (Longitudinalschw.)	Dilatation $\frac{\partial u}{\partial x}$ und Dichteänderung $\frac{\partial \varrho}{\partial t}$
1	Knoten	0	Bauch
	Bauch	l	Knoten
2	Knoten	0, $\frac{2l}{3}$	Bauch
	Bauch	$\frac{l}{3}$, l	Knoten
3	Knoten	0, $\frac{2l}{5}$, $\frac{4l}{5}$	Bauch
	Bauch	$\frac{l}{5}$, $\frac{3l}{5}$, l	Knoten
4	Knoten	0, $\frac{2l}{7}$, $\frac{4l}{7}$, $\frac{6l}{7}$	Bauch
	Bauch	$\frac{l}{7}$, $\frac{3l}{7}$, $\frac{5l}{7}$, l	Knoten
5	Knoten	0, $\frac{2l}{9}$, $\frac{4l}{9}$, $\frac{6l}{9}$, $\frac{8l}{9}$	Bauch
	Bauch	$\frac{l}{9}$, $\frac{3l}{9}$, $\frac{5l}{9}$, $\frac{7l}{9}$, l	Knoten
	Dilatation $\frac{\partial u}{\partial x}$ und Dichteänderung $\frac{\partial \varrho}{\partial t}$	bei 0 freier, bei l fester Stab (Longitudinalschw.) oder bei 0 offene, bei l geschlossene Gassäule (Longitudinalschw.)	Verrückung u und Geschwindigkeit $\frac{\partial u}{\partial t}$

II. Torsionsschwingungen kreiszylindrischer Stäbe.

Sämtliche für Longitudinalschwingungen abgeleiteten Gesetze gelten offenbar auch hier, da alle Bedingungsgleichungen mathematisch dieselbe Form haben. Nur ist statt der Verrückung u der Drehungswinkel ψ, statt der Geschwindigkeit $\frac{\partial u}{\partial t}$ die Winkelgeschwindigkeit $\frac{\partial \psi}{\partial t}$, statt der linearen Dilatation $\frac{\partial u}{\partial x}$ die Sche-

rung $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ einzusetzen; die Dichteänderung $\frac{\partial \varrho}{\partial x}$ hat kein unmittelbares Analogon. Die Tabellen 3 und 4 für die Knotenlagen sind ebenfalls anwendbar.

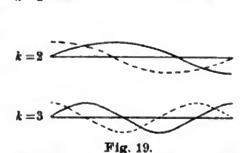


Fig. 19.
Schwingungsfigur der ersten drei Partialschwingungen.
Ausgezogene Kurve ——: Verrückung bzw. Geschwindigkeit bei fest-freiem Stab, Druck- und Dichteänderung bei freifestem Stab.
Gestrichelte Kurve ------: Dichte und Druckänderung bei fest-freiem Stab, Verrückung und Geschwindigkeit bei freifestem Stab.

III. Longitudinal- und Transversalschwingungen von Saiten.

Auch hier gelten dieselben Überlegungen, daher auch dieselben Gesetze für die Schwingungsform. Bei den Transversalschwingungen tritt für u die Verrückung v bzw. w, für die Dilatation $\frac{\partial u}{\partial x}$ der Neigungswinkel[1]) $\frac{\partial v}{\partial x}$ bzw. $\frac{\partial w}{\partial x}$ des betreffenden Saitenelementes gegen die Abszissenachse x ein.

Es können jedoch, da beide Saitenenden fest sein müssen, nur die unter I 1. (Stab mit festen Enden) angeführten Lösungen in Betracht kommen. Die Schwingungsfrequenzen der Partialtöne sind daher bei Saiten immer nur durch Gl. (32), die Knotenlagen durch Tabelle 3 gegeben, wenn darin u durch v bzw. w ersetzt wird.

27. Räumliches und zeitliches Zusammenfallen der Knoten und Bäuche. Faßt man das über die Lage der Knoten und Bäuche Gesagte zusammen, so erhält man folgendes Bild:

Bei jeder einzelnen Partialschwingung fallen räumlich zusammen die

Knoten der Verrückung oder Verschiebung der Teilchen (u, v, w bezw. ψ),

der Geschwindigkeit der Teilchen $\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right)$,

der Druck- und Dichtegradienten $\frac{\partial p}{\partial x}$ und $\frac{\partial \varrho}{\partial x}$;

andererseits fallen zusammen die

Knoten der Dilatation $\frac{\partial u}{\partial x}$ bezw. der Neigung gegen die Abszissenachse $\frac{\partial v}{\partial x}$ und $\frac{\partial w}{\partial x}$, wie der Scherung $\frac{\partial \psi}{\partial x}$,

1) Eigentlich der Tangens des Neigungswinkels.

des Druckes p und seiner zeitlichen Änderung $\frac{\partial p}{\partial t}$,

der Dichte ϱ und ihrer zeitlichen Änderung $\frac{\partial \varrho}{\partial t}$.

Die Knoten der einen Art fallen räumlich stets mit den Bäuchen der anderen zusammen. Diese Sätze folgen ohne weiteres aus den verschiedenen Beziehungen zwischen den genannten Größen, wenn man die zulässigen Integrale einsetzt, die durchweg Produkte von Sinus- oder Kosinusfunktionen sind.

Für das zeitliche Zusammenfallen ergibt sich ebenso folgendes:

Es sind stets in gleicher oder um 180° verschiedener Phase

einerseits {
- die Verrückung (u, v, w bezw. ψ),
- die Dilatation $\frac{\partial u}{\partial x}$ bezw. die Neigung gegen die Achse $\frac{\partial v}{\partial x}$ und $\frac{\partial w}{\partial x}$, sowie die Scherung $\frac{\partial \psi}{\partial x}$,
- der Druck p und der Druckgradient $\frac{\partial p}{\partial x}$,
- die Dichte ϱ und ihr Gradient $\frac{\partial \varrho}{\partial x}$,

andererseits die Geschwindigkeit der Teilchen $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$ bezw. $\frac{\partial \psi}{\partial t}$.

Die Phasen dieser beiden Arten von Größen sind um 90° bezw. 270° gegeneinander verschoben.

28. Schwingungsform bei beliebigem Anfangszustand. Übereinanderlagerung der Partialschwingungen. Die bei den bisher betrachteten Schwingungen möglichen Frequenzen n, die durch Gl. (32) und (33) in Nr. **25** bestimmt werden, bilden eine arithmetische, im Verhältnis der ganzen Zahlen ansteigende Reihe. Die zugehörigen Partialtöne werden als „harmonische" bezeichnet, insbesondere vom 2. Partialton ab als harmonische Obertöne.

Die hier behandelten schwingungsfähigen Gebilde, Saiten, longitudinal schwingende Stäbe und ebenso Gassäulen (vgl. Nr. **33**), können also bei den besprochenen Schwingungstypen Töne der harmonischen Partial-Tonreihe geben, und zwar entweder die vollständige Reihe mit allen Ordnungszahlen (wenn an beiden Enden des Stabes oder der Saite gleichartige Grenzbedingungen herr-

schen) oder nur die ungeradzahligen Partialtöne (wenn die Grenzbedingungen verschiedenartig sind).

Diese Partialschwingungen können auch gleichzeitig in mehr oder weniger großer Anzahl stattfinden, sie können sich einfach übereinanderlagern. Mathematisch ergibt sich die Möglichkeit der Übereinanderlagerung daraus, daß die Differentialgleichung der Schwingungsbewegung [Gl. (13) in Nr. **18**] vom 1. Grade ist, so daß partikuläre Integrale beliebig additiv zu allgemeineren Integralen zusammengefügt werden können. Von der relativen Stärke der Partialtöne hängt der Klang ab, den die schwingende Saite oder der Stab aussendet. Je mehr die höheren Partialtöne im Klang vertreten sind, desto markiger, durchdringender, schmetternder wird er. Das kommt noch stärker zum Ausdruck bei den ganz analogen Schwingungen der Gassäulen und Pfeifen, die später in Nr. **33** ff. behandelt werden.

Die Übereinanderlagerung verschiedener Partialschwingungen ergibt neue, von der einfachen Sinusform beliebig abweichende Formen, die man an der Gestalt der transversal schwingenden Saite direkt beobachten kann. Da andererseits das Vorhandensein der Partialschwingungen die Klangfarbe bestimmt, so folgt, daß diese mit der Form der Schwingung innig verbunden ist. Weiter ist es nun auch möglich durch Superposition von Partialschwingungen einen willkürlich gegebenen Anfangszustand zu befriedigen. Denn diese Summe von Partikularintegralen ist für jeden einzelnen Zeitpunkt, also auch für $t=0$, nichts anderes als eine Fouriersche Reihe (vgl. Bd. I, Nr. **9**—**13**). Die Variable darin ist x. Die Reihen enthalten hier entweder nur Sinus- oder nur Kosinusglieder, da nur die eine oder die andere Art von Gliedern als Ortsfunktion in den zulässigen Partikularintegralen vorkommen (vgl. Nr. **26**).

Z. B. ist für die Longitudinalschwingungen und Torsionsschwingungen eines beiderseits festen Stabes oder einer Saite, bei der ja immer die Enden fest sind, die allgemeinste mit den Grenzbedingungen verträgliche Lösung

$$(44 \qquad u=\sum_{k=1}^{\infty} u_k=\sum_{k=1}^{\infty}(A_k' \sin n_k t + A_k'' \cos n_k t)\sin\frac{n_k x}{c}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(n_k t+\vartheta_k)\sin\frac{n_k x}{c},$$

wobei

$$n_k = \frac{k\pi c}{l}, \qquad (k = 1, 2 \ldots),$$

oder ausgeschrieben

$$(44\text{a}) \begin{cases} u = (A_1' \sin n_1 t + A_1'' \cos n_1 t) \sin \frac{n_1 x}{c} \\ \qquad\qquad + (A_2' \sin n_2 t + A_2'' \cos n_2 t) \sin \frac{n_2 x}{c} + \cdots \\ \quad = A_1 \sin (n_1 t + \vartheta_1) \sin \frac{n_1 x}{c} + A_2 \sin (n_2 t + \vartheta_2) \sin \frac{n_2 x}{c} + \cdots \end{cases}$$

Für Transversalschwingungen der Saite ist u durch v bezw. w zu ersetzen, sonst bleibt alles dasselbe.

Für Logitudinal- und Torsionsschwingungen eines beiderseits freien Stabes ist analog

$$(45) \qquad u_k = \sum_{k=1}^{\infty} (B_k' \sin n_k t + B_k'' \cos n_k t) \cos \frac{n_k x}{c}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin (n_k t + \vartheta_k') \cos \frac{n_k x}{c},$$

wobei ebenfalls

$$n_k = \frac{k\pi c}{l}, \qquad (k = 1, 2 \ldots).$$

Für einen Stab mit einem festen und einem freien Ende folgt ebenso

$$(46) \qquad u = \sum_{k=1}^{\infty} (C_k' \sin n_k t + C_k'' \cos n_k t) \sin \frac{n_k x}{c}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin (n_k t + \vartheta_k'') \sin \frac{n_k x}{c}$$

bezw.

$$(46\text{a}) \qquad u = \sum_{k=1}^{\infty} (D_k' \sin n_k t + D_k'' \cos n_k t) \cos \frac{n_k x}{c}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} D_k \sin (n_k t + \vartheta_k''') \cos \frac{n_k x}{c},$$

wobei beidemale

$$n_k = \frac{(2k-1)\pi c}{2l}, \qquad (k = 1, 2 \ldots).$$

Die Koeffizienten A_k' und A_k'' bezw. A_k und die Phasenkonstante ϑ_k sowie die entsprechenden Größen B, C, D sind nach den Formeln Bd. I, Nr. **10**, Gl. (5) zu berechnen, wenn der Anfangszustand gegeben ist.

Für die Saite ergibt sich die Berechnung der Koeffizienten der Fourierreihe, d. h. der Amplituden der Partialschwingungen folgendermaßen:

Es muß zur Zeit $t = 0$ Lage und Geschwindigkeit aller Saitenteilchen als Funktion der Koordinate x, d. h. als Funktion ihrer Ruhelage gegeben sein Die Lage der Teilchen bestimmt hier die Gestalt der Saite. Diese sei zur Zeit $t = 0$ gegeben durch eine Funktion $f(x)$, die Geschwindigkeit der Saitenteilchen durch $g(x)$.

Die allgemeine Lösung ist hier

$$(47) \qquad \begin{aligned} v &= \sum_{k=1}^{\infty} (A_k' \sin n_k t + A_k'' \cos n_k t) \sin \frac{n_k x}{c} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin (n_k t + \vartheta_k) \sin \frac{n_k x}{c}, \\ n_k &= \frac{k\pi c}{l}, \qquad (k = 1, 2 \ldots). \end{aligned}$$

Setzt man hierin $t = 0$, so muß dieser Ausdruck gleich $f(x)$ werden; differentiiert man v erst nach t, bildet also die Geschwindigkeit $\frac{\partial v}{\partial t}$ und setzt darin $t = 0$, so muß der neue Ausdruck gleich $g(x)$ werden. Das liefert, wenn man für n_k seinen Wert einsetzt, die beiden Fourierreihen

$$(48) \qquad \left\{ \begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} A_k'' \sin \frac{k\pi x}{l} &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \vartheta_k \sin \frac{k\pi x}{l} = f(x), \\ \sum_{k=1}^{\infty} n_k A_k' \sin \frac{k\pi x}{l} &= \sum_{k=1}^{\infty} n_k A_k \cos \vartheta_k \sin \frac{k\pi x}{l} = g(x). \end{aligned} \right.$$

Die Koeffizienten dieser Entwickelungen sind also bestimmt durch die erste der Gleichungen (5) von Nr. 10 in Band I, da die Reihen

nur Sinusglieder enthalten. Dabei tritt zunächst eine Schwierigkeit auf. Diese Gleichung lautet hier

$$(49)\quad A_k'' = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx \text{ bezw. } n_k A_k' = \frac{1}{l}\int_0^{2l} g(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx,$$

sie verlangt also die Kenntnis der Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ in dem Intervall $2l$, während diese doch von vornherein nur in dem Intervall l, der Saitenlänge, gegeben sind. Die Schwierigkeit wird aber dadurch behoben, daß die Form der Fourierreihe schon feststeht, indem aus (48) folgt, daß sie nur Sinusglieder enthält. Das bedeutet, daß die durch sie dargestellte Funktion sich als ungerade Funktion über die Grenzen des Intervalls 0 und l beiderseits fortsetzt. Diese Fortsetzung hat man also für $f(x)$ und $g(x)$ diesseits 0 und jenseits l zu wählen, so daß sich dafür etwa ein Bild wie Fig. 20 ergibt. Bei der Integration kann man statt der Grenzen 0 und $2l$ auch die Grenzen $-l$ und $+l$ nehmen, die auch um $2l$ voneinander abstehen. Da nun sowohl $f(x)$ bezw. $g(x)$ als auch $\sin\frac{k\pi x}{l}$ ungerade Funktionen sind, also für gleiche positive und negative Werte von x gleiche Werte, nur mit entgegengesetztem Vorzeichen haben, so hat ihr Produkt für gleichen absoluten Wert von $-x$ und $+x$ denselben Wert, auch in bezug auf das Vorzeichen; man kann daher je zwei solcher Werte in den Integralen (49) zusammenfassen und schreiben



Fig. 20. Schwingungsfigur der gezupften Saite und ihre analytische Fortsetzung über die Grenzen der Saite hinaus.

$$(49\text{a})\quad A_k'' = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx,\quad n_k A_k' = \frac{2}{l}\int_0^{l} g(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx.$$

Übrigens ergibt eine ganz analoge Überlegung dieselben Formeln (49a) für die Kosinusreihe; es ist dabei nur $\cos\frac{k\pi x}{l}$ an Stelle von $\sin\frac{k\pi x}{l}$ zu setzen.

29. Schwingungen der gezupften Saite. Diese Formeln sollen auf die gezupfte, die mit einem Hammer angeschlagene und die mit dem Bogen gestrichene Saite angewandt werden.

Die gezupfte (gerissene) Saite wird mit dem Fingernagel oder einem Stift aus der Ruhelage ausgelenkt und dann mit der

Geschwindigkeit Null losgelassen. Die Gestalt der ausgelenkten Saite besteht (nahezu) aus zwei geraden Stücken, die an der Angriffsstelle des Stiftes unter einem gewissen Winkel zusammenstoßen. In Wirklichkeit ist solche Unstetigkeit hier nicht vorhanden, sondern nur eine sehr starke Krümmung. Wir nehmen jedoch Unstetigkeit, also einen scharfen Knick, an, weil dies mathematisch einfacher ist, physikalisch aber keinen erheblichen Unterschied bedingt, wenn der auslenkende Stift dünn genug ist im Verhältnis zur Saitenlänge.

Die Saite erstrecke sich von $x = 0$ bis $x = l$, der Stift greife bei $x = x'$ an; die Auslenkung zur Zeit $t = 0$ betrage an dieser Stelle v_0'. Hiernach sind die Gleichungen für die Gestalt der Saite leicht aufzustellen, und man erhält damit die Anfangsbedingungen: es muß sein,

$$(50)\quad \text{für } t=0 \begin{cases} v_0 = f(x) = \dfrac{v_0'}{x'}\,x \quad \text{im Intervall } 0 \leqq x \leqq x', \\ v_0 = f(x) = -\dfrac{v_0'}{l-x'}(x-l) \quad \text{im Intervall } x' \leqq x \leqq l, \\ \left(\dfrac{\partial v}{\partial t}\right)_0 = g(x) = 0. \end{cases}$$

Es folgt zunächst, daß sämtliche Koeffizienten $A_k' = 0$ sind, oder was dasselbe bedeutet, daß $\cos\vartheta_k = 0$, ϑ_k also ein ungerades Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$ ist, im einfachsten Falle $\frac{\pi}{2}$ selbst. Daraus folgt weiter, daß die Koeffizienten A_k'' und A_k einander gleich sind, so daß die Lösung die Form hat

$$(51)\quad \begin{cases} v = \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k \sin\dfrac{n_k x}{c}\cos n_k t = \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k \sin\dfrac{k\pi x}{l}\cos\dfrac{2\pi t}{T_k} \\ = \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k \sin\dfrac{k\pi x}{l}\cos\dfrac{2k\pi t}{T_1}, \end{cases}$$

wobei

$$(52)\quad \begin{cases} n_k = 2\pi N_k = \dfrac{k\pi c}{l} = k n_1 = 2\pi k N_1, \\ T_k = \dfrac{1}{N_k} = \dfrac{2\pi}{n_k} = \dfrac{2l}{kc} = \dfrac{T_1}{k}, \qquad (k = 1, 2, 3 \ldots) \end{cases}$$

ist; n_k ist die Kreisfrequenz (zyklische Schwingungszahl), N_k die Schwingungszahl in der Zeiteinheit d. h. in 1 Sekunde, T_k die

Periode (Schwingungsdauer) der $k$ten Partialschwingung, T_1 diejenige der Grundschwingung. Ausgeschrieben lauten die Gleichungen (51) in verschiedenen gleichwertigen Formen, deren Zahl leicht noch vermehrt werden kann:

$$(51\,a)\quad \begin{cases} v = A_1 \sin\frac{n_1 x}{c}\cos n_1 t + A_2 \sin\frac{n_2 x}{c}\cos n_2 t \\ \qquad\qquad + A_3 \sin\frac{n_3 x}{c}\cos n_3 t + \cdots \\ v = A_1 \sin\frac{\pi x}{l}\cos n_1 t + A_2 \sin\frac{2\pi x}{l}\cos 2 n_1 t \\ \qquad\qquad + A_3 \sin\frac{3\pi x}{l}\cos 3 n_1 t + \cdots \end{cases}$$

Die Koeffizienten A_k'' (oder A_k) ergeben sich aus Gl. (49a) in der Form

$$(53)\qquad A_k'' = A_k = \frac{2 l^2 v_0'}{k^2 \pi^2 x'(l-x')}\sin\frac{k\pi x'}{l}, \qquad (k = 1, 2, 3 \ldots).$$

Die Amplituden der Partialtöne nehmen also mit wachsender Ordnungszahl k ab, weil k^2 im Nenner steht. Daneben ist aber noch der Einfluß des Faktors $\sin\frac{k\pi x'}{l}$ wirksam. Er bewirkt, daß diejenigen Töne besonders stark vertreten sind, für welche der Ausdruck $k\pi x'/l$ zufällig in der Nähe eines ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$ liegt $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots\right)$, dagegen diejenigen Partialtöne schwach oder auch garnicht, für welche dieser Ausdruck in der Nähe der ganzzahligen Vielfachen von π liegt bezw. gleich diesen Werten ist. Dies letztere kann nur dann stattfinden, wenn x'/l ein rationaler Bruch, x' also ein aliquoter Teil der Saitenlänge l ist. Die entsprechenden Partialschwingungen, welche an der Stelle x' einen Knoten haben würden, fallen dann ganz weg.

Beispiel 1) $x' = l/2$, d. h. die Saite wird in der Mitte ihrer Länge gezupft. Es fallen aus die Töne mit den geraden Ordnungszahlen 2, 4, 6 ..., die in der Saitenmitte einen Knoten haben würden. Für die ungeraden wird abwechselnd $\sin\frac{k\pi x'}{l} = \pm 1$, und die Koeffizienten werden demnach

$$A_k'' = A_k = \frac{8 v_0'}{k^2 \pi^2}\sin\frac{k\pi}{2}, \qquad (k = 1, 3, 5 \ldots)$$

d. h.

$$A_1 = +\frac{8 v_0'}{\pi^2}, \quad A_3 = -\frac{8 v_0'}{9\pi^2}, \quad A_5 = +\frac{8 v_0'}{25\pi^2}, \ldots; \quad A_2 = A_4 = \cdots = 0;$$

so daß die Bewegung dargestellt wird durch

$$(54) \begin{cases} v = \dfrac{8 v_0'}{\pi^2}\left\{\sin\dfrac{\pi x}{l}\cos\dfrac{\pi c t}{l} - \dfrac{1}{9}\sin\dfrac{3\pi x}{l}\cos\dfrac{3\pi c t}{l} + \dfrac{1}{25}\sin\dfrac{5\pi x}{l}\cos\dfrac{5\pi c t}{l} - \cdots\right\} \\ = \dfrac{8 v_0'}{\pi^2}\left\{\sin\dfrac{\pi x}{l}\cos\dfrac{2\pi t}{T_1} - \dfrac{1}{9}\sin\dfrac{3\pi x}{l}\cos\dfrac{6\pi t}{T_1} + \dfrac{1}{25}\sin\dfrac{5\pi x}{l}\cos\dfrac{10\pi t}{T_1} - \cdots\right\} \end{cases}$$

indem man die durch (52) bestimmten Werte n_1, n_2 ... einsetzt.

Beispiel 2) $x' = \frac{l}{3}$, d. h. die Saite wird an einem Punkte gezupft, der um ein Drittel ihrer Länge von einem Ende entfernt ist. Es fallen die Töne mit den Ordnungszahlen 3, 6, 9 ... weg, der Sinusfaktor von (53) wird $\pm \frac{1}{2}\sqrt{3} = \pm 0{,}866$, die Koeffizienten werden

$$A_k'' = A_k = \frac{9 v_0'}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{3}, \qquad (k = 1, 2; 4, 5; \ldots)$$

d. h. ausgeschrieben

$$A_1 = +\frac{9\sqrt{3}}{2}\frac{v_0'}{\pi^2}; \quad A_2 = +\frac{9\sqrt{3}}{2}\frac{v_0'}{4\pi^2}; \quad A_4 = -\frac{9\sqrt{3}}{2}\frac{v_0'}{16\pi^2};$$

$$A_5 = -\frac{9\sqrt{3}}{2}\frac{v_0'}{25\pi^2}; \ldots \quad A_3 = A_6 = A_9 = \cdots = 0.$$

$$(55) \begin{cases} v = \dfrac{9\sqrt{3}\,v_0'}{2\pi^2}\left\{\begin{array}{l}\sin\dfrac{\pi x}{l}\cos\dfrac{\pi c t}{l} + \dfrac{1}{4}\sin\dfrac{2\pi x}{l}\cos\dfrac{2\pi c t}{l} - \dfrac{1}{16}\sin\dfrac{4\pi x}{l}\cos\dfrac{4\pi c t}{l} \\ \qquad - \dfrac{1}{25}\sin\dfrac{5\pi x}{l}\cos\dfrac{5\pi c t}{l} + \cdots\end{array}\right\} \\ = \dfrac{9\sqrt{3}\,v_0'}{2\pi^2}\left\{\sin\dfrac{\pi x}{l}\cos\dfrac{2\pi t}{T_1} + \dfrac{1}{4}\sin\dfrac{2\pi x}{l}\cos\dfrac{4\pi t}{T_1} - \dfrac{1}{16}\sin\dfrac{4\pi x}{l}\cos\dfrac{8\pi t}{T_1} - \cdots\right\} \end{cases}$$

Die Amplitudenabnahme der Partialtöne mit wachsender Ordnungszahl folgt in diesen beiden Fällen natürlich demselben Gesetz, nur ist die Reihe der wirklich vorhandenen Partialtöne jedesmal eine andere.

Beispiel 3) Allgemein sei $x' = \frac{pl}{q}$, wobei p und q ganze Zahlen sind, und zwar $p < q$. Ist z. B. $p = 2$, $q = 5$, so heißt das: die Saite wird an einem Punkte gezupft, der um $^2/_5$ von einem Saitenende entfernt ist.

Die Koeffizienten A_k'' (oder A_k) von Gl. (53) werden

$$A_k'' = A_k = \frac{2 v_0'}{k^2 \pi^2 \frac{p}{q}\left(1 - \frac{p}{q}\right)} \sin \frac{k \pi p}{q}. \tag{53a}$$

Diejenigen Obertöne fallen aus, für welche kp ein Vielfaches von q ist, weil dann der sinus Null wird; z. B. bei der obigen Annahme $\frac{p}{q} = {}^2/_5$ die Partialtöne $k = 5, 10, 15 \ldots$ Bei den übrigen wiederholt sich periodisch der gleiche Zahlwert des Sinusfaktors, jedesmal wenn k um den Wert q wächst. Die Bewegung jedes Saitenpunktes wird dargestellt durch einen der einander gleichwertigen Ausdrücke (51a) mit den Amplituden A_k von Gl. (53a).

30. Behandlung der gezupften Saite mit der d'Alembertschen Lösung. Ein anschauliches Bild der Saitenbewegung, d. h. des zeitlichen Verlaufs derselben zu geben, sind die Gleichungen von Nr. **29** nicht geeignet. Dazu geht man besser auf die d'Alembertsche Lösung zurück. Nach dieser (vgl. Nr. **23**) wird die Form der Saite in jedem Augenblick durch die Übereinanderlagerung einer nach $-x$ (links) und einer nach $+x$ (rechts) fortschreitenden Welle erhalten. Bei der gezupften, also ausgebogenen und ohne Anfangsgeschwindigkeit losgelassenen Saite sind diese beiden Wellen gleichgestaltet und von gleicher Amplitude. Sie haben die Form der durch das Zupfen ausgebogenen Saite, nur mit halber Ordinatenhöhe. Der Wellenberg, den die Ausbiegung darstellt, teilt sich im Augenblick des Freilassens der Saite in zwei Berge von halber Höhe, die nach links und rechts als Φ- und Ψ-Welle auseinandergehen, an den Enden reflektiert werden und so beständig über die Saite hin- und herlaufen. Mittels der in Nr. **23** behandelten Methode der Darstellung erhält man die in den Figuren 21—23 wiedergegebenen Bilder der aufeinanderfolgenden Gestalten, welche die Saite für verschiedene Lage des Zupfpunktes zu den beigeschriebenen Zeitmomenten annimmt.

Die Art der Bewegung ist in allen Fällen folgende: In Richtung der Saite s wirkt die überall gleiche Spannung P. Auf den Punkt C an der Spitze des von der ausgebogenen Saite gebildeten Daches wirkt also ein resultierender Zug R, der sich nach dem Parallelogramm der Kräfte aus den beiden gleichen in den Richtungen CA und CB wirkenden Spannungen P ergibt (vgl. Fig. 24). Infolge dieses Zuges R stürzt das Dach zusammen. Der Zusammen-

bruch beginnt an der Spitze und schreitet in Richtung des resultierenden Zuges nach untenhin fort. Die Spitze flacht sich zu einer geradlinigen Strecke DE ab, die in der Richtung R gegen die Abszissenachse hinwandert und dabei immer länger wird. Ihre Enden gleiten an den ihre Richtung beibehaltenden, aber sich natürlich immer mehr verkürzenden Dachkanten CDA und CEB (den geradlinig gespannten Stücken der Saiten) wie an festen Führungen herab. Erreicht die Abflachung an dem einen oder an beiden Enden die Abszissenachse, so tritt für die weitere Bewegung jenseits der Achse als Führungsgerade das Spiegelbild der anderen Führungsgeraden ein, und die Abflachung schreitet parallel mit sich selbst nach der negativen

Fig. 21. Fig. 22. Fig. 23.

$t=0$, $t=\frac{T}{8}$, $t=\frac{T}{4}$, $t=\frac{3T}{8}$, $t=\frac{T}{2}$

$t=0$, $t=\frac{T}{12}$, $t=\frac{2T}{12}$, $t=\frac{3T}{12}$, $t=\frac{4T}{12}$, $t=\frac{5T}{12}$, $t=\frac{T}{2}$

$t=0$, $t=\frac{T}{16}$, $t=\frac{2T}{16}$, $t=\frac{3T}{16}$, $t=\frac{4T}{16}$, $t=\frac{5T}{16}$, $t=\frac{6T}{16}$, $t=\frac{7T}{16}$, $t=\frac{T}{2}$

Fig. 21—23. Schwingungsfigur der gezupften Saite in verschiedenen Phasen. (T = Schwingungsperiode.)
In Fig. 21 liegt der Zupfpunkt in der Mitte, in 22 um $1/3$, in 23 um $1/4$ der Saitenlänge vom linken Saitenende entfernt.

C P P D E R A B

Fig. 24.
Bewegung der gezupften Saite. Konstruktion der rücktreibenden Kraft R.

Ordinatenseite fort, bis sie immer kürzer werdend wieder zur Spitze eines dem ursprünglichen gleichen Daches wird. Dieses ist das durch doppelte Spiegelung erhaltene Bild von jenem. Dann geht das Spiel in derselben Weise rückwärts. Der Zusammenbruch und die von ihm herrührende Abflachung schreiten also wie eine Welle über das System hinweg, aber nicht in der Richtung x, der Ruhelage der Saite, sondern in der Richtung des resultierenden Zuges R. Die Punkte der Saite bewegen sich jeder geradlinig senkrecht zur Abszissenachse in der Richtung v. Jeder Punkt beginnt seine Bewegung in dem Augenblick, wo die Einsturzwelle ihn erreicht und beendet sie, wenn die Welle über ihn hinweggegangen ist. Vorher und nachher verharrt er in Ruhe.

Die abgeflachte Strecke DE des Daches steht senkrecht auf der Richtung R. Das ist aus der Anschauung auf Grund der Prinzipien der Mechanik zu folgern und ergibt sich leicht in jedem Einzelfalle durch Berechnung der Winkel, welche die beiden Richtungen DE und CR mit der Abszissenachse bilden, wenn man die Konstruktion der Figuren 21—23 zugrunde legt. Allerdings gibt diese Konstruktion nur ein angenähertes Senkrechtstehen beider Richtungen. Der Winkel zwischen ihnen nähert sich um so mehr einem Rechten, je kleiner die Amplitude H der Ausbiegung im Verhältnis zur Saitenlänge l ist. Genauer gesagt, muß H so klein sein gegen den Abstand $x' = \frac{pl}{q}$ des Zupfpunktes vom nächstgelegenen Saitenende, daß $H^2 : x'^2$ gegen 1 vernachlässigt werden kann. Die angegebene Konstruktion der Saitenform versagt also, wie leicht erklärlich ist, wenn der Zupfpunkt bei konstant gehaltener Ausbiegungshöhe H dem Saitenende zu nahe rückt, oder wenn bei konstanter Lage der Zupfstelle H zu groß wird. Es ist dabei zu bedenken, daß alle unsere Gleichungen ja nur unter der Voraussetzung gelten, daß die Verrückungen v hinreichend klein bleiben, um das Superpositionsprinzip noch anwenden zu können. Es handelt sich also immer um Annäherungen mit erlaubten Vernachlässigungen.

31. Geschlagene Saite. Ähnlich der hier ausführlich behandelten Bewegung der gezupften Saite läßt sich die der geschlagenen und gestrichenen Saite behandeln. Nur sind die zu erfüllenden Bedingungen komplizierter.

Der theoretisch einfachste Fall ist der, bei welchem ein vollkommen harter (starrer) Hammer schlägt und so schnell zurück-

springt, daß die Saite während der Berührungszeit sich noch nicht merklich aus ihrer Ruhelage entfernt. Dann ist die Funktion $f(x)$ von Nr. 21 gleich Null und die Funktion $g(x)$ nur auf der vom Hammer berührten Strecke von Null verschieden, indem hier die Saitenpunkte durch den Stoß eine gewisse Anfangsgeschwindigkeit erhalten. Doch liefert diese einfache Annahme keine mit der Erfahrung übereinstimmende Bewegung; noch weniger, wenn man die Hammerbreite verschwindend klein nimmt, so daß nur ein Längenelement dx der Saite eine gewisse Anfangsgeschwindigkeit $\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_0 = g(x')$ erhält.

Die Rechnung ist aber für diesen zuletzt erwähnten Spezialfall sehr einfach. Die Koeffizienten der Fourierreihen (48) in Nr. 28 für den Anfangszustand werden

$$(56)\quad \begin{cases} A_k'' = 0; \\ A_k' = \dfrac{2\dot{v}_0'}{n_k l}\sin\dfrac{k\pi x'}{l} = \dfrac{2\dot{v}_0'}{k\pi c}\sin\dfrac{k\pi x'}{l}, \qquad n_k = \dfrac{k\pi c}{l} \qquad (k = 1, 2 \ldots) \end{cases}$$

wobei $\dot{v}_0'$ das Produkt aus der Länge dx des geschlagenen Saitenstückes und der durch den Schlag erteilten Geschwindigkeit ist. Die Bewegung würde also nach Gl. (47) in Nr. 28 dargestellt werden durch

$$(57)\quad \begin{cases} v = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{2\dot{v}_0'}{n_k l}\sin\dfrac{k\pi x'}{l}\sin\dfrac{k\pi x}{l}\sin\dfrac{k\pi c t}{l}, \\ \left[n_k = \dfrac{k\pi c}{l}, \quad c = \sqrt{\dfrac{p}{\varrho}} = \sqrt{\dfrac{P}{q\varrho}}\right]. \end{cases}$$

Die Formel (56) zeigt, daß die Amplituden der Partialtöne mit wachsender Ordnungszahl k weniger schnell abnehmen als bei der gezupften Saite mit zwei geradlinigen Stücken und scharfem Knick. Die Obertöne müßten also hier noch stärker zur Geltung kommen. Im übrigen gilt das über den Wegfall bestimmter Obertöne bei gewissen Lagen der Zupfstelle Gesagte auch hier für die gleichen Lagen der Anschlagstelle.

Die ganze Rechnung kann jedoch nur als Beispiel für die mathematische Behandlung dienen; physikalisch ist sie für die Akustik wertlos, weil die zugrunde gelegten Annahmen über die Art des Anschlags nicht zu verwirklichen sind. Erstens ist der Hammer nicht unendlich schmal, zweitens aber — und das ist

die Hauptsache — ist die Berührungsdauer von Hammer und Saite nicht verschwindend klein gegen die Periode der Saitenschwingung. Der Hammer springt nicht infolge seiner eigenen Elastizität zurück, sondern wird erst von der zurückschnellenden Saite mitgenommen und so zurückgetrieben. Das Zurückschnellen der Saite erfolgt aber erst, wenn von den beiden durch den Hammerstoß erzeugten Wellen, die vom Anschlagpunkt nach entgegengesetzten Richtungen fortschreiten, die am näheren Saitenende reflektierte auf der Rückkehr den Anschlagpunkt wieder erreicht hat. Solange dauert nach den Versuchen von Kaufmann[1]) die Berührung.

Helmholtz hatte, weil auf Versuchen beruhende Daten fehlten, die entgegengesetzte Annahme gemacht, daß der Hammer infolge seiner Elastizität zurückspringt, und zwar bevor die reflektierte Welle zurückkommt. Für den zeitlichen Verlauf des Druckes zwischen Hammer und Saite, also der von jenem ausgeübten Kraft während der Berührung hatte er — ebenfalls in Ermangelung experimenteller Daten — die Sinusform angenommen. Daraus ergibt sich für die Amplituden A_k der Fourierreihen ein Ausdruck, der mit wachsender Ordnungszahl k der Partialtöne abnimmt wie $\frac{1}{k^3}$, so lange die Berührungsdauer endlich bleibt, dagegen wie $\frac{1}{k}$, also langsamer und in Übereinstimmung mit dem obigen Resultat (vgl. Gl. (56)), wenn die Berührungsdauer unendlich klein wird. Der Klang wird also bei hartem, kurzen Anschlag wegen stärkeren Hervortretens der Obertöne schärfer, was mit der Erfahrung übereinstimmt. Quantitativ stimmt aber die Helmholtzsche Theorie nicht, wenn man sie auf die Tonerzeugung geschlagener Saiten z. B. beim Klavier anwenden will. Die von Kaufmann auf Grund seiner Beobachtungen aufgestellte Theorie ergibt dagegen sowohl für die Berührungsdauer als auch für die Bewegung des Anschlagpunktes Ausdrücke, die mit der Erfahrung nahezu übereinstimmen. Die Abweichungen scheinen von der Vernachlässigung der ja nicht unbedeutenden Dämpfung der Bewegung durch Reibungskräfte herzurühren.

Aus der Helmholtzschen Behandlung und deren Spezialfall (vgl. Gl. (56) und (57)) würde folgen, daß diejenigen Partialtöne ausfallen, die an der Anschlagstelle einen Knoten besitzen. (In

1) W. Kaufmann, Wiedemanns Annalen d. Phys. u. Chem. **54.** (1895) S. 675.

Gl. (56) wird für diesen Fall der Sinus gleich 0.) Darauf suchte Helmholtz eine Erklärung für die von den Klavierbauern gewählte Lage des Anschlagpunktes zu gründen. Sie soll nach ihm derartig sein, daß die bereits unharmonisch wirkenden Teiltöne 7 oder 9 nicht erregt werden. Dazu müßte der Anschlagpunkt genau in $^1/_7$ oder $^1/_9$ der Saitenlänge vom Ende entfernt liegen. Diese weitverbreitete Erklärung ist nach neueren Beobachtungen sicher unrichtig. Denn erstens liegt der Anschlagpunkt bei fast allen Instrumenten weder genau in $^1/_7$ noch genau in $^1/_9$, sondern schwankt zwischen $^1/_8$ und $^1/_{10}$. Anschlagen neben dem Knotenpunkt bringt aber den betreffenden Teilton gerade besonders stark hervor; die genannten Töne würden also durch die getroffene Wahl geradezu begünstigt werden. Zweitens fällt bei Anschlag mit einem weichen Hammer der Partialton, der einen Knoten im Schlagpunkt hat, keineswegs ganz aus, wie Versuche von Hipkins[1]) lehren. Tatsächlich kann man auch am Klavier den 7. und 9. Teilton hören; beide sind aber so schwach, daß sie nicht stören. Der wahre Grund für die in der Praxis beliebte Wahl der Lage der Anschlagstelle ist der, daß sie eine Schwingungsform ergibt, bei welcher der Grundton besonders stark und der Klang voll und kräftig ist. Die Stelle liegt so weit vom Ende entfernt, daß die Saite daselbst durch den Schlag noch genügend ausgebaucht wird, also genug Energie aufnehmen kann, und so weit von der Mitte entfernt, daß der Hammer noch rechtzeitig abgeworfen wird, um die Ausbildung der Grundschwingung nicht zu stören.

32. Gestrichene Saite. Nach den Beobachtungen mit dem Vibrationsmikroskop usw. ist die Bewegung eine teilweise erzwungene. Der durch Einreiben mit Harz (Kolophonium) klebrig gemachte Bogen hält die berührte Saitenstelle fest und nimmt sie mit seiner eigenen (im allgemeinen konstanten) Geschwindigkeit mit, bis die vergrößerte Saitenspannung, welche durch die infolge der Ausbuchtung erzeugte Dehnung entsteht, die Reibung überwindet und die Saite losreißt; die Saite schwingt nun frei zurück und wird bei einer bestimmten Lage neuerdings vom Bogen ergriffen und wieder in der alten Weise mitgeführt. Die Form der dabei entstehenden Schwingung hängt außer von der Intensität

1) A. J. Hipkins, Proc. Birmingham philos. Soc. **37** (1884 S. 363.

des Festhaftens (also der Reibung), die durch Beschaffenheit und Druck des Bogens bedingt wird, von der Bogengeschwindigkeit und der Lage der Streichstelle ab.

Die Bewegung der verschiedenen Saitenpunkte ist sehr mannigfaltig. Am einfachsten ist sie im allgemeinen an der Streichstelle; das Bewegungsgesetz der übrigen Punkte ist komplizierter. Weiter ist die Bewegung der Streichstelle besonders einfach, wenn sie mit einem wichtigeren Knoten, insbesondere also einem mehrfachen, d. h. mehreren Partialtönen gemeinsamen, Knoten zusammenfällt; z. B. wenn sie in der Saitenmitte oder in $^1/_3$, $^1/_4$ usw. liegt. Dann schwingt der gestrichene Punkt mit konstanter Geschwindigkeit (der Bogengeschwindigkeit) aufwärts und nach dem Abreißen vom Bogen mit ebenfalls konstanter aber geänderter Geschwindigkeit abwärts. Diese Bewegung wird durch eine einfache Zickzacklinie mit zwei verschieden geneigten geraden Strecken dargestellt, wenn man die Zeit als Abszisse, die Ablenkung als Ordinate aufträgt (Fig. 25). Das ist die von Helmholtz[1]) zuerst beobachtete und für typisch gehaltene Bewegungsform der gestrichenen Saite. Nach Beobachtungen von Raps und Krigar-Menzel[2]) ist das nur ein spezieller Fall; die Bewegung ist im allgemeinen komplizierter.



Fig. 25.
Helmholtzsche Bewegungsform eines Punktes der gestrichenen Saite.

Eine den Beobachtungen besser als die Helmholtzsche entsprechende Theorie hat W. Voigt[3]) und vor ihm Lindemann[4]) gegeben. Wegen Raummangel muß hier auf die Wiedergabe beider Theorien verzichtet werden.

4. Kapitel.

Eigenschwingungen zylindrischer und konischer Gassäulen (Pfeifen). Ebene und kugelförmige Wellen.

33. Differentialgleichung der Eigenschwingungen zylindrischer Gassäulen und ebener Wellen. Die Herleitung der

1) H. v. Helmholtz, Tonempfindungen Beilage VI.

2) O. Krigar-Menzel und A. Raps, Wiedemanns Ann. d. Physik u. Chemie **44** (1891) S. 623.

3) W. Voigt, Göttinger Nachrichten, 1890 S. 502.

4) F. Lindemann, Ber. d. naturf. Ges. in Freiburg i. B. **7** (1880) S. 500.

Gleichung für die (longitudinalen) Schwingungen linearer Gassäulen in Röhren (Pfeifen) erfolgt genau so wie diejenige der Gleichung für die Longitudinalschwingungen von Stäben; nur ist statt des Dehnungsmoduls E der Kompressionsmodul k (die Volumenelastizität) einzuführen. Die Bewegung der Gasteilchen erfolgt im wesentlichen in Richtung der Röhrenachse, die seitlichen Verschiebungen senkrecht zur Achse sind bei hinreichend engen Röhren zu vernachlässigen. Bei Wegfall äußerer Volumenkräfte gelten die Gleichungen

$$\varrho \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad \mathfrak{u} = \frac{\partial u}{\partial t} \tag{1}$$

$$\varrho \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x} = -\frac{\partial \varrho}{\partial t} \tag{2}$$

$$\frac{p}{\varrho^{\varkappa}} = \frac{\bar{p}}{\bar{\varrho}^{\varkappa}} = \text{konst.} \tag{3}$$

$$\varrho = \bar{\varrho}(1+s). \qquad p = \bar{p}(1+s)^{\varkappa} = \text{appr}\,\bar{p}(1+\varkappa s). \tag{4}$$

Es bedeutet x die laufende Koordinate in der Röhrenachse, u die Verschiebung eines Teilchens in der Richtung x, $\mathfrak{u}$ die Geschwindigkeit dieser Bewegung, ϱ die Dichte, p den allseitig gleichen Druck, $s = \frac{\varrho - \bar{\varrho}}{\bar{\varrho}}$ die Verdichtung oder Kompression (Dichtezunahme dividiert durch ursprüngliche Dichte), $\varkappa$ das Verhältnis der spezifischen Wärmen des Gases bei konstantem Druck und konstantem Volumen $\left(\varkappa = \frac{c_p}{c_v}\right)$. Gleichung (1) ist das Newtonsche Bewegungsgesetz, (2) die Kontinuitätsbedingung, (3) die adiabatische Zustandsgleichung (adiabatisches Druckgesetz) des Gases, welche Druck und Dichte miteinander verknüpft. p und ϱ, $\bar{p}$ und $\bar{\varrho}$ sind zusammengehörige Werte; $\bar{p}$ und $\bar{\varrho}$ die Werte für den Ruhezustand des Gases, um welche p und ϱ schwanken. Daß bei den schnellen Schwingungen keine merkliche Wärmeabgabe stattfindet und deshalb nicht das isotherme Druckgesetz, sondern das adiabatische anzuwenden ist, wurde schon in Nr. 12 allgemein besprochen. Daraus folgt, daß als Volumenelastizitätsmodul der adiabatische $k_a = p\varkappa$ einzusetzen ist. Gleichung (4) stellt die Dichteänderung dar, welche bei kleinen Änderungen in erster Annäherung linear ist; dementsprechend gilt auch die Gleichung für die Druckänderungen in der approximativen Form.

Die Gleichungen (1) und (2) sind die eindimensionalen Spezialformen der allgemeinen Gleichungen (6) und (37) in Nr. 8 und 14 und gehen aus ihnen hervor, wenn man bedenkt, daß äußere Kräfte wegzulassen sind, daß scherende Kräfte (Schubspannungskräfte) $\mathfrak{X}_y$, $\mathfrak{X}_z$ usw. in Gasen (und Flüssigkeiten) nicht vorkommen können, und daß infolge dessen der Druck nach allen Richtungen gleichmäßig als Normaldruck wirkt (die drei Hauptdrücke $\mathfrak{X}_x$, $\mathfrak{Y}_y$, $\mathfrak{Z}_z$ sind einander gleich und gleich p gesetzt). Diese Gleichungen sind auch leicht gesondert abzuleiten. Für Gl. (1) ist das in Nr. 16 bei den Longitudinalschwingungen von Stäben ausgeführt.

Aus den Gleichungen (1) bis (4) kann man durch passende Kombinationen derselben die abhängigen Variablen bis auf eine eliminieren und erhält so Differentialgleichungen zur Bestimmung der Lage und der Geschwindigkeit der Gasteilchen, des Druckes, der Dichte und der Kompression. Diese haben sämtlich im wesentlichen die gleiche Form. Aus (3) folgt zunächst

$$(5) \qquad \left(\frac{\partial p}{\partial \varrho}\right)_{\text{adiab}} = \frac{\bar{p}}{\bar{\varrho}^{\varkappa}} \varkappa \varrho^{\varkappa - 1} = \frac{p \varkappa}{\varrho} = \text{appr} \frac{\bar{p} \varkappa}{\bar{\varrho}}.$$

Denn statt des Faktors p kann näherungsweise der konstante Wert $\bar{p}$ gesetzt werden, da p sich von dem Ruhewert $\bar{p}$ des Druckes nur immer um verschwindend kleine Größen unterscheidet. Entsprechende Vertauschungen können zwischen ϱ und $\bar{\varrho}$ überall da vorgenommen werden, wo eine dieser Größen als Faktor auftritt. Es wird somit

$$(6) \qquad \frac{\partial p}{\partial x} = \left(\frac{\partial p}{\partial \varrho}\right)_{\text{adiab}} \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial x} = \frac{\bar{p} \varkappa}{\bar{\varrho}} \frac{\partial \varrho}{\partial x}.$$

Durch Einsetzen dieses Wertes in (1) und Division beider Seiten der Gleichungen (1) und (2) mit ϱ bzw. $\bar{\varrho}$ erhält man sie in den Formen

$$(1\text{a}) \qquad \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial t} = -\frac{\bar{p} \varkappa}{\bar{\varrho}^2} \frac{\partial \varrho}{\partial x},$$

$$(2\text{a}) \qquad \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x} = -\frac{1}{\bar{\varrho}} \frac{\partial \varrho}{\partial t}.$$

Indem man (1a) nach t, (2a) — nach Multiplikation mit $\frac{\bar{p} \varkappa}{\bar{\varrho}}$ — nach x differentiiert und voneinander subtrahiert, erhält man die partielle Differentialgleichung für die Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$

$$(7) \qquad \frac{\partial^2 \mathfrak{u}}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \mathfrak{u}}{\partial x^2}, \qquad c^2 = \frac{\bar{p} \varkappa}{\bar{\varrho}},$$

wobei die Konstante rechts mit c bezeichnet ist. Setzt man hierin $\varrho = \bar{\varrho}(1 + s)$ ein, so folgt dieselbe Gleichung (7) mit derselben Konstante c für die Verdichtung s. Differentiiert man (1a) nach x, (2a) nach t und subtrahiert, so ergibt sich die Gleichung für die Dichte ϱ, wieder in genau derselben Form. Setzt man darin $\varrho = \bar{\varrho}(1 + s)$, so folgt dieselbe Gleichung mit derselben Konstante c für die Verdichtung s. Ersetzt man darin weiter ϱ durch p, indem man die aus (3) folgenden Beziehungen $\frac{\partial p}{\partial x} = \bar{p}\varkappa \frac{\partial \varrho}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial t} = p\varkappa \frac{\partial \varrho}{\partial t}$ benutzt, so erhält man diese Gleichung auch für den Druck p, und zuletzt folgt sie auch noch für die Verschiebung u. Gleichung (7) ist also der gemeinsame Repräsentant der Differentialgleichungen für Dichte, Verdichtung, Druck, Geschwindigkeit und Verschiebung der Teilchen[1]) bei den (longitudinalen) Schwingungen linearer Gas- und Flüssigkeitssäulen. Denn die Ableitung ändert sich für Flüssigkeiten nicht, nur der Wert von c wird ein anderer, weil statt der Gleichung (3) eine andere Beziehung zwischen Druck und Dichte gilt. Führt man nämlich in (1) für $\frac{\partial p}{\partial x}$ nicht den schon mit Hilfe von Gl. (3) ausgerechneten Wert $p\varkappa \frac{\partial \varrho}{\partial x}$, sondern den allgemein gültigen $\frac{\partial p}{\partial x} = \left(\frac{\partial p}{\partial \varrho}\right)_{\text{adiab}} \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial x}$ nach (6) ein, so wird die Differentialgleichung (7) in allgemeinerer Form

$$(7\text{a}) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \varrho}\right)_{\text{adiab}}.$$

Die Gleichung bleibt also unverändert, nur die Konstante c hat nicht die spezielle Form wie in (7). In der neuen Form gilt sie allgemein auch für unvollkommene Gase und für reibungslose Flüssigkeiten.

34. Die Schallgeschwindigkeit. Der Wert von c, die Schallgeschwindigkeit in dem betreffenden Medium (vgl. Nr. **19**), hängt mit dem adiabatischen Kompressionsmodul k_a eng zusammen; denn es ist nach (20) in Nr. **12** $k_a = -v\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{\text{adiab}}$, also wird durch Einführung von $\varrho = \frac{1}{v}$ [2])

1) Sie gilt in derselben Form auch für das Geschwindigkeitspotential φ als abhängige Variable, dessen Bedeutung in Nr. **15** erklärt worden ist.

2) v ist hier das spezifische Volumen.

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \varrho}\right)_{\text{adiab}} = \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{\text{adiab}} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varrho} = -v\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{\text{adiab}} \cdot v = k_a v$$

oder wenn mit erlaubter Vernachlässigung $v = \bar{v}$, $\varrho = \bar{\varrho}$ gesetzt wird,

$$c^2 = k_a \bar{v} = \frac{k_a}{\bar{\varrho}} = \frac{1}{K_a \bar{\varrho}} \cdot \tag{8}$$

Das Quadrat der Schallgeschwindigkeit in Flüssigkeiten und Gasen ist gleich dem Quotienten aus Kompressionsmodul k und Dichte ϱ, oder, was dasselbe ist, gleich dem reziproken Wert des Produktes aus Kompressibilität K und Dichte ϱ.

Kompressionsmodul (Volumenelastizität) und Dichte hängen von der Temperatur ab; daher ändert sich die Schallgeschwindigkeit mit dieser. Meist wird sie mit steigender Temperatur größer, weil die Dichte dabei abnimmt und sich schneller ändert als der Kompressionsmodul. Außerdem ist sie mit dem Druck variabel, da ϱ und k auch von diesem abhängen.

Bei vollkommenen Gasen hängt c nur von der Temperatur, nicht vom Druck ab; denn der Quotient $\frac{p}{\varrho}$ ist nach der Zustandsgleichung derselben nur von der Temperatur abhängig, und zwar ist, wie leicht ersichtlich,

$$c = c_0 \sqrt{1 + \alpha t} = c_0 \sqrt{\alpha T}. \tag{9}$$

Hier ist α der thermische Ausdehnungskoeffizient der Gase ($\alpha = 0{,}00367 = \frac{1}{273}$), t die Temperatur in Celsiusgraden vom Eisschmelzpunkt an gerechnet, $T = t + 273$ die absolute Temperatur, c_0 die Schallgeschwindigkeit bei 0^0 Celsius. Vorausgesetzt ist, daß das Verhältnis der spezifischen Wärmen $\varkappa$ sich nicht mit der Temperatur ändert, sonst gilt Gleichung (9) nicht.

Tabelle 5 enthält die Werte der Schallgeschwindigkeit bei 0^0 C. für einige Gase.

Tabelle 5.

	c_0		c_0
Schweflige Säure	209,0 $\frac{\text{m}}{\text{sek}}$	Sauerstoff	317,2 $\frac{\text{m}}{\text{sek}}$
Kohlensäure	260,5 „	Kohlenoxyd	337,1 „
Stickoxydul	263,1 „	Stickstoff	337,3 „
Schwefelwasserstoff	289,3 „	Wasserstoff	1263 „
Chlorwasserstoff	295,5 „		

35. Schwingungen in einer beiderseits geschlossenen Röhre. Die Differentialgleichung (7) bzw. (7a) in Nr. 33 ist genau dieselbe wie die der Longitudinalschwingungen von Stäben; daher gelten auch dieselben Integrale, die nur je nach den Grenzbedingungen verschieden sind. Diese sind aber wieder unter gleichen äußeren Umständen für Geschwindigkeit, Dichte, Druck usw. verschieden; z. B. ist an festen Wänden (geschlossenen Rohrenden) die Verschiebung und Geschwindigkeit der Teilchen senkrecht zur Wand Null, die Kompression (Verdichtung) aber hat dort Maximalwerte. Die Form der Integrale für u, $\mathfrak{u}$, ϱ, s, p ist also zum Teil verschieden. Doch braucht man natürlich nur für eine dieser Größen das passende Integral zu finden, die anderen ergeben sich dann aus ihm mittels der Gleichungen (1) bis (4). Aus diesen folgt sofort, daß Verschiebungen u und Geschwindigkeiten $\mathfrak{u}$, sowie Druck- und Dichtegradienten $\frac{\partial p}{\partial x}$ und $\frac{\partial \varrho}{\partial x}$ an denselben Stellen ihre Nullwerte haben, und daß andererseits die Nullstellen (Knoten) der Dilatation $\frac{\partial u}{\partial x}$, bzw. der Verdichtung s und der zeitlichen Druck- und Dichteschwankungen $\frac{\partial p}{\partial t}$ und $\frac{\partial \varrho}{\partial t}$ zusammenfallen. Diese Beziehungen sind in der allgemeinen Zusammenstellung der Grenzbedingungen in Nr. 27 und in den Tabellen 3 und 4 für die Lage der Knoten usw. schon mit angeführt.

Es sind folgende Fälle möglich

1. Beide Enden der Röhre (Pfeife) sind geschlossen,
2. Beide Enden der Röhre sind offen,
3. Ein Ende ist offen, das andere geschlossen.

Praktischen Wert haben besonders Fall 2 und 3; jener ist in den offenen, dieser in den gedeckten (gedackten) Lippenpfeifen der Orgeln und anderen Musikinstrumenten, sowie bei Zylinderresonatoren annähernd verwirklicht.

Fall 1. Beide Röhrenenden geschlossen. Die Röhre erstrecke sich von $x = 0$ bis $x = l$.

Man erhält die Eigenschwingungen eines langgestreckten zylindrischen, allseitig geschlossenen Hohlraumes. Die Grenzbedingungen sind, da offenbar an den durch feste Wände geschlossenen Enden die Gasteilchen sich nicht senkrecht zu diesem bewegen können,

$$u = 0 \text{ für } x = 0 \text{ und } x = l. \tag{10}$$

Die Differentialgleichung (7), in der man statt $\mathfrak{u}$ die Verschiebung

u als abhängige Variable einsetzt, hat offenbar dieselbe Lösung wie die entsprechende Gleichung (3) in Nr. 16 für die Longitudinalschwingungen eines beiderseits festen Stabes (vgl. Nr. 26). Zulässige Partialschwingungen sind

$$(11) \qquad u_k = \begin{cases} A_k' \sin \frac{n_k x}{c} \sin n_k t \\ A_k'' \sin \frac{n_k x}{c} \cos n_k t \end{cases} \text{mit } n_k = \frac{k \pi c}{l} \qquad (k = 1, 2, 3 \ldots).$$

Die k^{te} Partialschwingung in allgemeiner Form ist die Summe beider, nämlich

$$(11a) \quad u_k = (A_k' \sin n_k t + A_k'' \cos n_k t) \sin \frac{n_k x}{c} = A_k \sin \frac{n_k x}{c} \sin (n_k t + \vartheta_k),$$

wobei

$$(12) \qquad A_k = \sqrt{A_k'^2 + A_k''^2}; \; \sin \vartheta_k = \frac{A_k''}{\sqrt{A_k'^2 + A_k''^2}}, \quad \cos \vartheta_k = \frac{A_k'}{\sqrt{A_k'^2 + A_k''^2}}.$$

Hieraus folgt alles andere. Die Partialtöne bilden die vollständige harmonische Reihe.

36. Schwingungen in einer beiderseits offenen Röhre (offene Pfeife). Fall 2. Beide Röhrenenden offen (offene Pfeife). Die elementare Theorie nimmt an, daß an den offenen Enden, wo die Gassäule mit der äußeren Atmosphäre in Verbindung steht, der Druck und damit auch die Dichte sich momentan ausgleichen, so daß daselbst beide Größen konstant die äußeren Ruhewerte besitzen; die Verdichtung s ist also dort gleich Null. Die Röhre erstrecke sich von $x = 0$ bis $x = l$. Die Grenzbedingungen sind daher:

$$(13) \qquad s = 0 \text{ für } x = 0 \text{ und } x = l.$$

Die Differentialgleichung (7), mit s statt u als abhängiger Variablen, hat hier dieselbe Lösung wie die Gleichung im vorigen Fall für die Verschiebung u, also

$$(14) \qquad s_k = (B_k' \sin n_k t + B_k'' \cos n_k t) \sin \frac{n_k x}{c} = B_k \sin \frac{n_k x}{c} \sin (n_k t + \vartheta_k')$$

wobei B_k und ϑ_k analog wie dort bestimmt sind.

Für die Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$ ergibt sich hiernach mittels Gleichung (2) und (4) in Nr. **33**:

$$(15)\qquad \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial t} = -\frac{1}{(1+s)}\frac{\partial s}{\partial t} = -\text{approx}\,\frac{\partial s}{\partial t}$$

$$= -n_k(B_k'\cos n_k t - B_k''\sin n_k t)\sin\frac{n_k x}{c};$$

also durch Integration

$$(16)\qquad \mathfrak{u}_k = c(B_k'\cos n_k t - B_k''\sin n_k t)\cos\frac{n_k x}{c},$$

wenn man die additive Integrationskonstante, die bei einer periodischen Lösung keine Bedeutung hat, wegläßt. Die Verschiebung u wird somit

$$(17)\qquad u_k = \frac{c}{n_k}(B_k'\sin n_k t + B_k''\cos n_k t)\cos\frac{n_k x}{c}$$

$$= \frac{c}{n_k}B_k\cos\frac{n_k x}{c}\sin(n_k t + \vartheta_k').$$

Statt mit der Verdichtung s kann man auch mit der Verschiebung u rechnen, muß dann aber als Grenzbedingungen einführen

$$(13\text{a})\qquad \frac{\partial u}{\partial x}\left(\text{bzw. } \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x}\right) = 0 \quad \text{für} \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = l, \end{cases}$$

d. h. der Verschiebungsgradient (und der Geschwindigkeitsgradient) ist an den offenen Enden gleich Null. Diese Beziehung ergibt sich aus Gleichung (2) und (4) in Nr. **33**, da $\frac{\partial s}{\partial t}$ offenbar dieselben Nullstellen hat wie s selbst. Diese Grenzbedingung ist dieselbe, welche in Nr. **26** für den Stab mit freien Enden galt. Man kann daher auch die dortige Lösung [Gleichung (38) in Nr. 26] ohne weiteres anwenden und erhält sofort u_k in der Form von (17). Nur die Konstanten B_k' und B_k'' sind noch mit dem konstanten Faktor $\frac{c}{n_k}$ multipliziert.

Die Kreisfrequenzen sind wie im Fall 1

$$(18)\qquad n_k = \frac{k\pi c}{l}, \qquad (k = 1, 2, 3\ldots)$$

umfassen also die vollständige harmonische Partialtonreihe.

Die beiden Fälle der beiderseits geschlossenen und offenen Röhre unterscheiden sich also, wie auch von vornherein zu er-

warten ist, nur dadurch, daß die Normalfunktion der einen $\sin\frac{n_k x}{c}$ ist, wenn die der anderen $\cos\frac{n_k x}{c}$ ist, und umgekehrt.

37. Schwingungen in einer an einem Ende geschlossenen Röhre (gedackte Pfeife). Vergleichende Zusammenstellung. Fall 3. Ein Röhrenende geschlossen, das andere offen.

Es sei $x=0$ das geschlossene, $x=l$ das offene Ende. Die Grenzbedingungen sind

$$(19)\qquad u=0 \quad \text{für} \quad x=0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}=0 \quad \text{für} \quad x=l.$$

Die Lösung ist genau dieselbe wie diejenige in Nr. **26** für die Longitudinalschwingungen eines bei $x=0$ festen, bei $x=l$ freien Stabes, nämlich wie Gleichung (41) daselbst

$$(20)\quad u_k=(C_k'\sin n_k't+C_k''\cos n_k't)\sin\frac{n_k'x}{c}=C_k\sin\frac{n_k'x}{c}\sin(n_k't+\vartheta_k'')$$

$$(21)\qquad n_k'=\frac{(2k-1)\pi c}{2l} \qquad (k=1,2,3\ldots).$$

Für eine Röhre mit offenem Ende bei $x=0$, geschlossenen bei $x=l$ würde entsprechend $\cos\frac{n_k'x}{c}$ statt $\sin\frac{n_k'x}{c}$ zu setzen sein.

Die Reihe der Partialtöne enthält hier nur die ungeradzahligen $n_1'=\frac{\pi c}{2l}$, $n_2'=\frac{3\pi c}{2l}$, $n_3'=\frac{5\pi c}{2l}\ldots$, wodurch die andere Klangfarbe der gedackten Pfeifen bedingt ist. Zugleich ist die absolute Höhe des Grundtones n_1' eine andere als die des Grundtones n_1 der gleich langen offenen Pfeife. Sie ist die tiefere Oktave von diesem. Die Partialtöne einer offenen und einer gedackten Pfeife von gleicher Länge l sind

Tabelle 6:

k	1	1	2	2	3	3	
gedackt	$n_1'=\frac{\pi c}{2l}$		$n_2'=\frac{3\pi c}{2l}$		$n_3'=\frac{5\pi c}{2l}$		usw.
offen		$n_1=\frac{\pi c}{l}$		$n_2=\frac{2\pi c}{l}$		$n_3=\frac{3\pi c}{l}$	usw

Die zugehörigen Frequenzen sind

Tabelle 7:

	Kreisfrequenz n gedackt	offen	Sekundenfrequenz gedackt	offen
$k=1$	$n_1' = \frac{\pi c}{2l}$		$N_1' = \frac{c}{4l}$	
		$n_1 = \frac{\pi c}{l}$		$N_1 = \frac{c}{2l}$
$k=2$	$n_2' = \frac{3\pi c}{2l}$		$N_2' = \frac{3c}{4l}$	
		$n_2 = \frac{2\pi c}{l}$		$N_2 = \frac{2c}{2l}$
$k=3$	$n_3' = \frac{5\pi c}{2l}$		$N_3' = \frac{5c}{4l}$	
		$n_3 = \frac{3\pi c}{l}$		$N_3 = \frac{3c}{2l}$
	usw.		usw.	

Für trockene Luft mit der Schallgeschwindigkeit $c = 33\,300$ cm/sek. = 333 m/sek. bei 0^0 C sind die sekundlichen Schwingungszahlen der Partialtöne verschieden langer Pfeifen in den Tabellen 8a und b (entnommen aus Auerbach, Akustik, Bd. II des Handbuches der Physik 1909) bis zum 4. bzw. 8. Oberton angegeben.

Die Lage der Knoten und Bäuche für Verschiebung, Geschwindigkeit, Druck, Dichte usw. ist bereits in Nr. **26** angegeben (vgl. auch die Tabellen 3 und 4) Fig. 26 (ebenfalls entnommen aus: Handbuch der Physik, Bd. II, Akustik, bearb. von F. Auerbach) zeigt die Lage der Knoten und Bäuche in beiden Fällen für den 1.—4. Partialton.

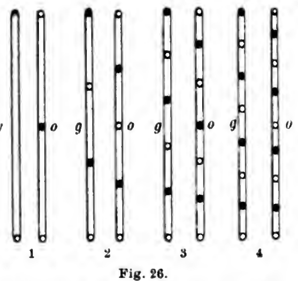


Fig. 26.
Lage der Knoten • und Bäuche ∘ der Verrückung bei der gedackten (g) und offenen (O) Pfeife für die ersten vier Partialtöne

38. Mängel der elementaren Theorie offener Pfeifen.

Tabelle 8.

Partialtöne von Pfeifen (Röhren) in Luft von 0° C.

a) gedackt.

l^{cm}	Grundton $k=1$		1. Oberton $k=2$		2. Oberton $k=3$		3. Oberton $k=4$		4. Oberton $k=5$	
515	C_{-2}	16,17	G_{-1}	48,5	E	80,9	B —	113,2	d	145,5
257,5	C_{-1}	32,2	G	97,0	e	161,6	b —	226,3	d_1	291,0
128,8	C	64,7	g	194,0	e_1	323,3	b_1 —	452,6	d_2	582
64,4	c	129,3	g_1	387,9	e_2	647	b_2 —	905	d_3	1 164
32,2	c_1	258,7	g_2	776	e_3	1 293	b_3 —	1 811	d_4	2 328
19,1	a_1	435	e_3	1 305	cis_4	2 175	g_4 —	3 045	h_4	3 915
16,1	c_2	517,3	g_3	1 552	e_4	2 587	b_4 —	3 621	d_5	4 656
8,05	c_3	1 025	g_4	3 105	e_5	5 175	b_5 —	7 243	d_6	9 313
4,03	c_4	2 069	g_5	6 207	e_6	10 345		—		—
2,01	c_5	4 139	g_6	12 417		—		—		—

b) offen.

(Die zu den Noten gehörigen Schwingungszahlen sind aus der oberen Tabelle a) zu entnehmen.)

l^{cm}	Grundton $k=1$	1. Oberton $k=2$	2. Oberton $k=3$	3. Oberton $k=4$	4. Oberton $k=5$	5. Oberton $k=6$	6. Oberton $k=7$	7. Oberton $k=8$	8. Oberton $k=9$
1030	C_{-2}	C_{-1}	G_{-1}	C	E	G	B —	c	d
515	C_{-1}	C	G	c	e	g	b —	c_1	d_1
257,5	C	c	g	c_1	e_1	g_1	b_1 —	c_2	d_2
128,8	c	c_1	g_1	c_2	e_2	g_2	b_2 —	c_3	d_3
64,4	c_1	c_2	g_2	c_3	e_3	g_3	b_3 —	c_4	d_4
38,2	a_1	a_2	e_3	a_3	cis_4	e_4	g_4 —	a_4	h_4
32,2	c_2	c_3	g_3	c_4	e_4	g_4	b_4 —	c_5	d_5
16,1	c_3	c_4	g_4	c_5	e_5	g_5	b_5 —	c_6	d_6
8,05	c_4	c_5	g_5	c_6	e_6	g_6	b_6 —	—	—
4,03	c_5	c_6	g_6	c_7	—	—	—	—	—

Die Voraussetzungen, welche der elementaren Theorie der Pfeifen zugrunde gelegt werden, sind nicht streng. Daher stimmen die Rechnungsergebnisse nicht ganz mit der Erfahrung überein. Insbesondere sind zwei wesentliche Abweichungen festzustellen, welche die berechnete Tonhöhe und die Lage des dem offenen Ende nächsten Knotens betreffen. Dieser liegt dem Ende näher als die Rechnung fordert und zwar um so mehr, je weiter die Pfeife ist. Die Tonhöhe ist ebenfalls von der Röhrenweite abhängig, sie sinkt im allgemeinen mit abnehmendem Rohrdurchmesser. Außerdem macht sich auch ein Einfluß des Materials und der Oberflächenbeschaffenheit der Wand auf die Tonhöhe bemerkbar.

Diese Änderung der Tonhöhe wird dadurch hervorgerufen, daß die Schallgeschwindigkeit c in engen Röhren nicht den Wert wie in freier Atmosphäre hat, sondern infolge der Reibung und der Wärmeabgabe des Gases an die Wände verkleinert wird.[1]) Die veränderte Knotenlage wird dadurch bedingt, daß die Grenzbedingung am offenen Ende nicht ganz richtig angesetzt ist, weswegen die berechnete Schallbewegung in der Röhre von der wahren abweicht. Man darf nämlich, wie Helmholtz nachgewiesen hat, nicht annehmen, daß am offenen Ende gar keine Druck- und Dichteänderungen stattfinden. Denn dann würde überhaupt kein Übergang von Schall aus der Röhre in die Atmosphäre möglich sein. Da in der Außenluft auch Schallbewegung vorhanden ist, nur mit anderer Form der Wellenflächen — in der Röhre ebene Wellen, außerhalb nahe der Mündung ungefähr halbkugelige Wellen in großer Ferne genau Kugelwellen —, so finden in der Ebene der Öffnung auch Druck- und Dichteänderungen statt, und zwar in solchem Betrage, daß die im Innern der Röhre herrschende Bewegung, welche durch Gleichung (14) bzw. (17) oder (20) dargestellt wird, stetig in die außen vorhandene Bewegung übergeht. Diese ist aber nicht mehr eindimensional, sondern hängt außer von x auch von den anderen Koordinaten y und z ab. Man muß also die allgemeine Theorie zu Hilfe nehmen, um die Schallbewegung auf Grund der richtigen Grenzbedingung zu ermitteln und die „Mündungskorrektion" der Pfeife, d. h. die Verschiebung des ersten Knotens zu berechnen. Für die prismatische und zylindrische Pfeife von überall gleicher Weite ist dies Problem von Lord

1) G. Kirchhoff, Poggendorfs Annalen d. Phys. u. Chem. **134** S. 177 (1868).

Rayleigh, G. Kirchhoff, Helmholtz u. a. näherungsweise gelöst. Ferner läßt es sich nach Helmholtz für Röhrenformen behandeln, die von der genauen Kreiszylinderform etwas, z. T. unwesentlich, abweichen, aber auch Rotationsflächen um die Röhrenachse sind. Und dabei lassen sich bestimmte trompetenähnliche Röhrenformen finden, für welche die Korrektion Null ist. Die Helmholtzsche „Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden" ist schließlich auch auf solche Formen des eingeschlossenen Luftraumes anwendbar, welche von der Röhrenform ganz abweichen, insbesondere auch solche Räume, welche nach allen drei Dimensionen gleichmäßig ausgedehnt sind (Kugeln, kurze weite Zylinder usw.), die mit der Außenluft nur durch eine oder einige wenige enge Öffnungen in Verbindung stehen. Solche Formen — von Kirchhoff kubische Pfeifen genannt — werden als Resonatoren benutzt. Die Grundzüge dieser Theorie werden im 8. Kapitel behandelt. Vorher soll aber die Schwingungsbewegung in Gasen für den dreidimensionalen Fall allgemein besprochen und im besonderen auf den Spezialfall der Kugelwellen und die Eigenschwingungen der konischen Pfeifen angewandt werden.

39. Die Differentialgleichung bei Abhängigkeit von allen drei Raumkoordinaten. Dreidimensionales Problem. Schwingungen mit unendlich kleiner Amplitude sind stets wirbelfreie Bewegungen, da Wirbelbewegungen nicht unendlich klein bleiben. Der Geschwindigkeitsvektor[1]) $\mathfrak{u}$, als Funktion des Ortes betrachtet, läßt sich also als negativer Gradient des (skalaren) Geschwindigkeitspotentials φ darstellen[2])

$$\mathfrak{u} = -\operatorname{grad} \varphi \tag{22}$$

mit den Komponenten

$$\mathfrak{u}_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \mathfrak{u}_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \mathfrak{u}_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \tag{22a}$$

Diese Werte hat man in die allgemeinen Bewegungsgleichungen elastischer Körper — Gleichung (6) in Nr. 8 — einzuführen, in denen die drei Hauptdrücke $\mathfrak{X}_x = \mathfrak{Y}_y = \mathfrak{Z}_z = p$, die Scherungsdrücke aber gleich Null zu setzen sind. Die äußeren, auf die Vo-

1) Es soll hier wieder die Schreibweise der Vektorrechnung angewandt werden. (Vgl. v. Ignatowsky, diese Sammlung Bd. VI, 1).

2) Als Gradient wird hier der Anstieg der Größe φ bezeichnet; daher ist noch das negative Vorzeichen hinzugefügt.

lumenelemente der Flüssigkeit oder des Gases wirkenden Kräfte $\mathfrak{X}', \mathfrak{Y}', \mathfrak{Z}'$ haben in den meisten Fällen (wie z. B. bei der Schwere usw.) ein Kräftepotential V, so daß man alsdann setzen kann

$$\frac{\mathfrak{X}'}{\varrho} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\mathfrak{Y}'}{\varrho} = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\mathfrak{Z}'}{\varrho} = -\frac{\partial V}{\partial z}. \tag{23}$$

Sind die äußeren Kräfte Null, so erhält man die Eigenschwingungen der Gas- bzw. Flüssigkeitsmenge.

Bei der Umformung der Gleichungen (6) von Nr. 8 ist folgendes zu berücksichtigen. Die Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$ bezieht sich in der Gleichung (6) auf ein bestimmtes Massenteilchen, das sich zu der betrachteten Zeit gerade an der Stelle x, y, z befindet, im Laufe der Zeit aber weiter wandert, also andere Koordinaten x', y', z' erhält. Ein zur gleichen Zeit t an anderer Stelle x_1, y_1, z_1 befindliches Teilchen hat im allgemeinen andere Geschwindigkeit $\mathfrak{u}_1$ usw., die Geschwindigkeit ist also eine Funktion der Zeit t und des Ortes x, y, z, an dem sich das Teilchen gerade befindet. Die Gesamtänderung der Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$ während des Zeitelementes dt ist $d\mathfrak{u}$; die Beschleunigung wird also $\frac{d\mathfrak{u}}{dt}$. Diese Größe, ebenfalls eine Funktion von t und x, y, z, läßt sich in ihren Komponenten schreiben

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{u}_x}{dt} &= \frac{\partial \mathfrak{u}_x}{\partial t} + \frac{\partial \mathfrak{u}_x}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathfrak{u}_x}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathfrak{u}_x}{\partial z}\frac{dz}{dt} \\ &= \frac{\partial \mathfrak{u}_x}{\partial t} + \mathfrak{u}_x\frac{\partial \mathfrak{u}_x}{\partial x} + \mathfrak{u}_y\frac{\partial \mathfrak{u}_x}{\partial y} + \mathfrak{u}_z\frac{\partial \mathfrak{u}_x}{\partial z} \\ \frac{d\mathfrak{u}_y}{dt} &= \frac{\partial \mathfrak{u}_y}{\partial t} + \mathfrak{u}_x\frac{\partial \mathfrak{u}_y}{\partial x} + \mathfrak{u}_y\frac{\partial \mathfrak{u}_y}{\partial y} + \mathfrak{u}_z\frac{\partial \mathfrak{u}_y}{\partial z} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right. \tag{24}$$

indem man berücksichtigt, daß $\frac{dx}{dt} = \frac{du_x}{dt} = \mathfrak{u}_x$ ist usw. Sind nun die Geschwindigkeiten und ihre Änderungen unendlich klein, so sind die Produkte $\mathfrak{u}_x \frac{\partial \mathfrak{u}_x}{\partial x}$ usw. von höherer Ordnung klein und können vernachlässigt werden, so daß bei Bewegungen mit unendlich kleinen Verschiebungen, Geschwindigkeiten usw. $\frac{d\mathfrak{u}}{dt}$ durch $\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial t}$ ersetzt werden kann. Anders ausgedrückt heißt dies: man braucht keine Rücksicht darauf zu nehmen, daß bei der Bewegung eigentlich immer neue Teilchen an den betrachteten Raumpunkt

x, y, z gelangen, und kann so rechnen, als ob ein Raumelement immer von denselben materiellen Teilchen erfüllt bleibt.

Die drei Bewegungsgleichungen (6) von Nr. 8, welche bei Wegfall der Scherungsdrücke $\mathfrak{X}_y$, $\mathfrak{X}_z$ usw. in die Eulerschen hydrodynamischen Gleichungen übergehen

$$(25)\quad \frac{d\mathfrak{u}_x}{dt} = \frac{\mathfrak{X}'}{\varrho} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{d\mathfrak{u}_y}{dt} = \frac{\mathfrak{Y}'}{\varrho} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{d\mathfrak{u}_z}{dt} = \frac{\mathfrak{Z}'}{\varrho} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z},$$

vereinfachen sich mit Rücksicht hierauf noch weiter. Setzt man nämlich jetzt die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial \mathfrak{u}_x}{\partial t}$ usw. statt $\frac{d\mathfrak{u}_x}{dt}$ usw. ein, führt man ferner das Potential V der äußeren Kräfte nach (23) und die neue Hilfsgröße

$$(26)\qquad P = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\varrho}, \qquad p = F(\varrho)$$

ein, so erhalten die Gleichungen die Form[1])

$$(27)\quad \frac{\partial \mathfrak{u}_x}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(V+P), \quad \frac{\partial \mathfrak{u}_y}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y}(V+P), \quad \frac{\partial \mathfrak{u}_z}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}(V+P).$$

Führt man nun das Geschwindigkeitspotential φ ein, so werden sie

$$(28)\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + V + P\right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + V + P\right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + V + P\right) = 0,$$

und daraus folgt[2])

$$(29)\qquad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + V + P = f(t) + C.$$

C ist eine additive Integrationskonstante. Die nur von der Zeit abhängige Funktion $f(t)$ kann gleich Null gesetzt werden. Denn

1) In (26) ist die Dichte ϱ eine Funktion nur des Druckes p und umgekehrt. Man hat daher $\frac{dP}{dp} = \frac{d}{dp}\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{\varrho} = \frac{1}{\varrho}$. Also wird $\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dP}{dp}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x}$, und das Gleiche gilt für die anderen Koordinaten y und z.

2) Die linken Seiten von (28) sind die räumlichen Ableitungen der Funktion $\frac{\partial \varphi}{\partial t} + V + P$. Da diese Null sind, so kann die Funktion nur noch von der Zeit abhängen.

man kann zu φ eine ganz beliebige Funktion der Zeit additiv hinzufügen, ohne daß dadurch an den Geschwindigkeiten und überhaupt an der Bewegung, die man aus φ berechnet, etwas geändert wird. Diese Funktion kann man so wählen, daß ihre zeitliche Abgeleitete gleich $f(t)$ wird, so daß auf beiden Seiten von Gleichung (29) das Glied $f(t)$ additiv auftritt und sich weghebt.

Sind auch die äußeren Volumenkräfte $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{Z}'$ zu vernachlässigen, so ist V konstant, kann also gleich C angenommen werden, so daß auch diese beiden Größen wegfallen. Es bleibt somit als Gleichung für φ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + P = 0, \tag{30}$$

wobei

$$P = \int_{\bar{p}}^{p} \frac{dp}{\varrho}, \quad p = F(\varrho). \tag{31}$$

Der Druck p ist mit der Dichte ϱ durch das für den betreffenden Körper unter den besonderen Umständen des Problems geltende Druckgesetz verbunden, was hier durch die Gleichung $p = F(\varrho)$ ausgedrückt wird; bei isothermen Zustandsänderungen idealer Gase ist es z. B. das Boyle-Mariottesche Gesetz $p = \text{konst.}\,\varrho$, bei adiabatischen das Gesetz $p = \text{konst.}\,\varrho^{\varkappa}$. Dazu kommt die Kontinuitätsgleichung (37) von Nr. **14**, die durch Einführung von φ übergeht in

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} - \varrho\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right) = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} - \varrho \Delta \varphi = 0. \tag{32}$$

Durch die Gleichungen (30) bis (32) sind die vier Größen φ, p, ϱ, P bestimmt, wenn noch die Grenz- und Anfangsbedingungen gegeben sind. Man kann P, ϱ, p aus ihnen eliminieren und erhält dann als Gleichung, welcher φ genügen muß:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \varphi, \qquad \left(c^2 = \frac{\partial p}{\partial \varrho}\right). \tag{33}$$

Denn durch Differentiation von (30) nach t erhält man mit Rücksicht auf (31)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial \varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0,$$

da

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial F(\varrho)}{\partial \varrho} \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial \varrho} \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial t}$$

ist. Setzt man hier nun für $\frac{\partial \varrho}{\partial t}$ aus (32) den Wert $\varrho \Delta \varphi$ ein, so ergibt sich Gleichung (33), wenn man noch den Differentialquotienten $\frac{\partial p}{\partial \varrho}$, der bei unendlich kleinen Änderungen einen konstanten (nur noch von der Temperatur abhängigen) Wert besitzt, mit c^2 bezeichnet. Wie von früher her bekannt (vgl. Nr. **19**) ist c die Ausbreitungsgeschwindigkeit longitudinaler Wellen in dem Medium.

Die Gleichung (33) ist das dreidimensionale Analogon der früher ausführlich behandelten eindimensionalen Gleichung (13) in Nr. **18**. Diese wird nämlich durch Einführung des Geschwindigkeitspotentials φ zu

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \tag{34}$$

eine Gleichung, die auch aus (33) hervorgeht, wenn man die Glieder mit y und z wegläßt.

40. Die möglichen Formen der Lösung. Fortschreitende und stehende Wellen. Die Lösung des Problems der Schwingungen in Gas- oder Flüssigkeitsmengen kommt also darauf hinaus, Lösungen der Gleichung (33), der allgemeinen Wellengleichung, zu finden, welche auch die Grenzbedingungen und Anfangsbedingungen befriedigen. Bei diesen Lösungen sind die beiden Klassen der fortschreitenden Wellen und der stehenden Schwingungen zu unterscheiden. Letztere können nur in abgeschlossenen Systemen stattfinden, d. h. solchen Systemen, bei denen keine Energieabgabe nach außen durch Schallstrahlung erfolgt. Dabei können diese Systeme nach einer oder mehreren Dimensionen unendlich ausgedehnt sein. Z. B. kann auch der ganze unendliche Raum von ebenen stehenden Wellen erfüllt gedacht werden. Das Charakteristische daran ist immer, daß nirgends Energie dauernd in einer Richtung strömt, wie das bei fortschreitenden Wellen der Fall ist.

Endlich ausgedehnte Systeme müssen, damit sie keine Energie durch Schallstrahlung abgeben können, allseitig von festen Wänden umgeben sein. Die Schallbewegung in solchen ringsum eingeschlossenen Gasräumen ist, sobald sie stationär geworden ist, eine stehende Schwingung, und zwar eine Eigenschwingung, wenn keine äußeren Kräfte wirken, eine erzwungene, wenn solche äußeren, nur von der Zeit abhängigen periodischen Kräfte wirksam sind. Die stehende Schwingung geht, physikalisch betrachtet, aus der Übereinanderlagerung fortschreitender Wellensysteme hervor,

im einfachsten Falle aus einem direkten und einem an den Wänden reflektierten. Solange der stationäre Zustand noch nicht erreicht ist, muß man zur Lösung der Gleichung (33) Integrale benutzen, welche fortschreitende Wellen darstellen; nach Eintritt dieses Zustandes kann die Lösung auch in solcher Form aufgestellt werden, daß fortschreitende Wellen überhaupt nicht mehr darin vorkommen.

Im stationären Zustand ist die Verschiebung und Geschwindigkeit, und daher auch das Geschwindigkeitspotential φ einer einfach periodischen Funktion der Zeit proportional, als welche im einfachsten Falle die Sinus- bezw. Kosinusfunktion oder — beide zusammenfassend — die Exponentialfunktion mit imaginären Exponenten zu wählen ist. Solche Lösungen sind z. B. die für die Eigenschwingungen zylindrischer Pfeifen in Nr. **35** bis **37** aufgestellten Ausdrücke der Verschiebung, Dichteänderung usw. Aus dem soeben Gesagten geht aber auch hervor, daß die dort angegebenen Lösungen eigentlich nur für die beiderseits geschlossene Röhre streng sind; für die einseitig oder beiderseitig offene Röhre kann die Lösung nur annähernd richtig sein, weil bei diesen Röhrenformen gar kein geschlossener Hohlraum vorliegt, also auch kein stationärer Zustand der Bewegung möglich ist, der nur auf das Innere der Röhre beschränkt bleibt. Jedesmal, wenn die den Gasraum einschließenden Wände irgendwelche Öffnungen haben, durch die das Gas mit dem Außenraum in Verbindung steht, versagt die elementare Theorie, welche nur die Schwingungen der eingeschlossenen Gasmenge berücksichtigt, und man muß auch die Schallbewegung im Außenraum mit in Betracht ziehen. Das ist also, da völlig abgeschlossene Gasräume selten vorkommen, eigentlich immer nötig. Helmholtz hat gezeigt, wie man mit Hilfe gewisser allgemeiner Sätze der Potentialtheorie auch dieses Problem in besonderen Fällen lösen kann, indem man den Außen- und Innenraum in verschiedene Teile teilt, für diese passende Lösungen aufsucht und dieselben dann geeignet kombiniert. (Vgl. Kap. 8).

Für den Fall des vollkommen abgeschlossenen Systems, bei dem es sich also um stehende Schwingungen handelt, erhält man die dieser Bewegung entsprechende Lösung der Gleichung (33), indem man φ einer einfach periodischen Funktion der Zeit proportional setzt, im einfachsten Falle also proportional $\sin nt$ bezw. $\cos nt$, oder, beides zusammenfassend, e^{int}. Mathematisch betrachtet kommt das auf die Lösung durch Zerspalten der abhängigen

Variablen in ein Produkt mehrerer, nur von je einer Urvariablen abhängigen Funktionen hinaus, die auf die einfachere eindimensionale Gleichung (34) früher bereits angewandt worden ist.

Setzt man in (33)

$$\varphi = \varphi^{(t)} \cdot \varphi^*, \tag{35}$$

wo $\varphi^{(t)}$ nur von t, φ^* nur von den Raumkoordinaten abhängt, so zerfällt die Gleichung in die beiden Gleichungen

$$\frac{d^2\varphi^{(t)}}{dt^2} + n^2\varphi^{(t)} = 0; \tag{36}$$

$$\Delta\varphi^* + \frac{n^2}{c^2}\varphi^* = 0 \quad \text{oder} \quad \Delta\varphi^* + k^2\varphi^* = 0, \tag{37}$$

indem man $\frac{n^2}{c^2} = k^2$ setzt; n ist wie früher eine neu eingeführte Konstante, die, wie sich aus (36) ergibt, die Kreisfrequenz der Schwingung ist. Diese Frequenz bezw. die möglichen Frequenzen der Eigenschwingungen sind mit Hilfe der Grenzbedingungen zu berechnen, welche die „Normalfunktion“ φ^* des betreffenden Raumes zu erfüllen hat. Im Innern des Raumes muß φ^* überall der Gleichung (37) genügen.

41. Fortschreitende Kugelwellen. Eine wichtige Form der Lösung von Gleichung (33) ist diejenige, welche fortschreitende kugelförmige Wellen darstellt. Nimmt man an, daß die Erregung der Schwingung von einem Punkte O in der ruhenden, allseitig unendlich ausgedehnten Gasmasse ausgeht, so folgt aus Symmetriegründen, daß sich die Erregung rings um O mit nach allen Richtungen gleicher Geschwindigkeit ausbreiten muß. Die entstehenden Wellenflächen sind also Kugelflächen um O als Mittelpunkt. Das läßt sich analytisch leicht aus (33) ableiten.

Man führt räumliche Polarkoordinaten r, ϑ, ω ein. Es ist r der Radiusvektor vom Anfangspunkte O bis zu dem betrachteten Aufpunkt P, positiv gerechnet im Sinne von O nach P; ϑ der Winkel zwischen r und der z-Achse (Zenitdistanz), ω der Winkel, welchen die durch P und die z-Achse gelegte Meridianebene mit der xz-Ebene einschließt (Azimut). Damit r, ϑ, ω ein rechtwinkliges System bilden wie x, y, z, ist das Azimut ω in der Umlaufsrichtung zu nehmen, welche die positive x-Achse mit dem kleinsten Drehungswinkel (90^0) in die positive y-Achse dreht, und von 0 bis 2π zu rechnen; die Zenitdistanz ϑ ist von der positiven z-Achse

an zu rechnen und von 0 bis π zu zählen. Beide Richtungen sind in der Figur 27 durch Pfeile angedeutet. Drückt man $\Delta\varphi$ in diesen Koordinaten aus, so erhält man[1])

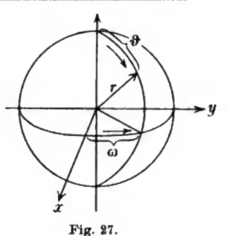


Fig. 27.
Rechtshändiges Polarkoordinatensystem r, ϑ, ω.

$$(38) \quad \Delta\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial\left(\sin\vartheta\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\right)}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega^2}.$$

Nun kann hier aber aus Symmetriegründen keine Abhängigkeit von ϑ und ω vorhanden sein, da die Bewegung sich gleichmäßig nach allen Seiten ausbreitet; daher sind $\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}$ und $\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega^2}$ gleich Null zu setzen und es hängt alles nur von r ab. Es wird hier also speziell

$$(38\text{a}) \qquad \Delta\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial r^2}.$$

Setzt man dies in (33) ein, multipliziert beiderseits mit r und berücksichtigt, daß r nicht von t abhängt, daß man also $\frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial t^2}$ statt $r\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$ schreiben kann, so geht die Bewegungsgleichung über in

$$(39) \qquad \frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial r^2}.$$

Das ist aber nichts anderes als die Differentialgleichung der ebenen Wellen (vgl. Gl. 7 in Nr. 35), für welche die allgemeine Lösung nach d'Alembert in Nr. 19 aufgestellt worden ist. Nur ist hier die abhängige Variable das Produkt $r\varphi$, Geschwindigkeitspotential mal Radiusvektor. Benutzt man die d'Alembertsche Lösung und dividiert beiderseits noch mit r, so ergibt sich für das Geschwindigkeitspotential der Kugelwellen der Ausdruck

$$(40) \qquad \varphi = \frac{1}{r}\Phi(r+ct) + \frac{1}{r}\Psi(r-ct).$$

Die Funktion $\frac{1}{r}\Psi(r-ct)$ stellt eine von O nach außen fortschreitende (divergierende) Welle, $\frac{1}{r}\Phi(r+ct)$ eine von außen

1) Vgl. z. B. H. Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik Bd. I § 44. (Braunschweig 1910).

nach O hinschreitende (konvergierende) Welle dar; bei beiden nimmt die Amplitude mit zunehmender Entfernung von O ab wie $\frac{1}{r}$. Die nach O hinschreitende Welle kann natürlich praktisch nur durch Reflexion einer nach außen gegangenen Welle an einer Kugelfläche erzeugt werden. Ist nur eine dieser beiden Wellen vorhanden, so hat man die betreffende andere Funktion Φ oder Ψ gleich Null zu setzen.

Durch Differentiation nach r erhält man die Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$, die immer in die Richtung r fällt und daher als $\mathfrak{u}_r$ bezeichnet werden soll

$$(41)\quad \begin{cases} \mathfrak{u}_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi(r+ct)}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\Phi(r+ct) + \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi(r-ct)}{\partial r} \\ \qquad - \frac{1}{r^2}\Psi(r-ct). \end{cases}$$

Daraus folgt, daß die Geschwindigkeit mit wachsendem Abstand r vom Erregungszentrum nicht gleichmäßig abnimmt, wie das Potential φ, sondern in unmittelbarer Nähe von O wie $\frac{1}{r^2}$, in großer Entfernung aber wie $\frac{1}{r}$, dazwischen nach einem komplizierteren Gesetze.

Multipliziert man beide Seiten von (40) mit dt und integriert, so erhält man die Verschiebung der Teilchen

$$(42)\quad \begin{cases} u_r = \int \mathfrak{u}_r\, dt = \frac{1}{r}\int \frac{\partial \Phi(r+ct)}{\partial r}\, dt - \frac{1}{r^2}\int \Phi(r+ct)\,dt \\ \qquad + \frac{1}{r}\int \frac{\partial \Psi(r-ct)}{\partial r}\, dt - \frac{1}{r^2}\int \Psi(r-ct)\,dt. \end{cases}$$

Obere Integrationsgrenze ist der Zeitmoment t, für den man die Verschiebung haben will, untere Grenze der Zeitmoment, wo das Teilchen sich in seiner Ruhelage befand, u_r also Null war. Auch hier gilt in kleiner Entfernung r Abnahme der Amplitude wie $\frac{1}{r^2}$ mit wachsendem r, in sehr großer Entfernung Abnahme wie $\frac{1}{r}$.

Aus der Kontinuitätsgleichung (32) in Nr. 39, in welcher rechts ϱ durch den konstanten Ruhewert $\bar{\varrho}$ ersetzt werden kann, ergibt sich weiter mit Rücksicht auf (38a) und (39)

$$(43)\quad \begin{cases} s = \dfrac{\varrho - \bar{\varrho}}{\bar{\varrho}} = \displaystyle\int \Delta\varphi\, dt = \int \frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial r^2}\, dt \\ = \dfrac{1}{r}\displaystyle\int \frac{\partial^2 \Phi(r+ct)}{\partial r^2}\, dt + \frac{1}{r}\int \frac{\partial^2 \Psi(r-ct)}{\partial r^2}\, dt. \end{cases}$$

Die Integrationsgrenzen sind der Zeitmoment t, für den die Dichte ϱ ist, und der Zeitmoment, wo sie $\bar{\varrho}$ ist, wo also die Verdichtung s Null ist.

Diese Gleichung aber läßt sich integrieren, wenn man nach (39) unter dem Integralzeichen $\frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial r^2}$ durch $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial t^2}$ ersetzt. Es wird dann

$$(43\text{a})\quad s = \frac{\varrho - \bar{\varrho}}{\bar{\varrho}} = \frac{1}{rc^2}\left[\frac{\partial(r\varphi)}{\partial t}\right]_{\bar{\varrho}}^{\varrho} = \frac{1}{c^2}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]_{\bar{\varrho}}^{\varrho}.$$

Schließlich wird der Druck

$$(44)\quad p = \frac{\bar{p}}{\bar{\varrho}^{\varkappa}}\,\varrho^{\varkappa} = \bar{p}(1+s)^{\varkappa} = \text{appr.}\,\bar{p}(1+\varkappa s),$$

indem man $(1+s)^{\varkappa}$ nach dem binomischen Lehrsatz entwickelt und beim zweiten Gliede abbricht.

Ist beispielsweise nur eine divergierende Sinuswelle Ψ vorhanden, so wird danach

$$(45)\quad \varphi = \frac{A'}{r}\sin\frac{2\pi}{\lambda}(r-ct) + \frac{A''}{r}\cos\frac{2\pi}{\lambda}(r-ct) = \frac{A}{r}\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(r-ct)+\theta\right],$$

$$(46)\quad A' = A\cos\theta, \quad A'' = A\sin\theta.$$

Es ist λ die Wellenlänge, $\frac{2\pi c}{\lambda} = N$ die sekundliche Schwingungsfrequenz. Weiter ist

$$(47)\quad \mathfrak{u}_r = -\frac{2\pi A}{r\lambda}\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(r-ct)+\theta\right] + \frac{A}{r^2}\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(r-ct)+\theta\right],$$

$$(48)\quad u_r = \frac{A}{rc}\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(r-ct)+\theta\right] + \frac{\lambda A}{2\pi c r^2}\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(r-ct)+\theta\right].$$

Die Hinzufügung der Integrationsgrenzen rechts ist überflüssig, wenn, wie es hier geschieht, die untere Grenze t_0 so gewählt wird, daß die Verschiebung u_r dabei verschwindet. Diese Zeit t_0 ist also dadurch bestimmt, daß für sie $u_r = 0$ sein soll; daher ist sie aus der Gleichung zu berechnen:

$$\text{(49)} \qquad \operatorname{tg}\left[\frac{2\pi}{\lambda}(r - ct_0) + \theta\right] = -\frac{\lambda}{2\pi r}.$$

Ferner wird die Verdichtung nach (43a)

$$\text{(50)} \quad \begin{cases} s = \frac{1}{r}\int \frac{\partial^2 \Psi(r-ct)}{\partial r^2} dt = -\frac{4\pi^2 A}{r\lambda^2}\int \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(r-ct)+\theta\right] dt \\ \qquad = -\frac{2\pi A}{cr\lambda}\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(r-ct)+\theta\right]. \end{cases}$$

Auch hier kann die Bezeichnung der Grenzen wegbleiben. Die Zeiten t_0, für welche $s = 0$ ist, ergeben sich hier aus der Gleichung $\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(r - ct_0) + \theta\right] = 0$, also

$$\text{(51)} \qquad t_0 = \frac{\lambda}{2\pi c}\left[\frac{2\pi r}{\lambda} - \theta - (2k+1)\frac{\pi}{2}\right]. \qquad (k = 0 \pm 1, \pm 2 \ldots).$$

Aus der Verdichtung folgt ohne weiteres der Druck p, dessen Wert hier nicht mehr hingeschrieben werden soll.

Die Verdichtungs- und Druckwelle breitet sich also ebenso wie die Potentialwelle φ selbst ohne Deformation, nur mit abnehmender Amplitude, aus. Dagegen erleiden die Geschwindigkeits- und Verschiebungswellen außer der Amplitudenabnahme Deformationen, da die Amplitude ungleich abnimmt.

Statt mit dem Geschwindigkeitspotential kann man hier ebensogut mit der Verdichtung s rechnen. Für diese ergibt sich nämlich, wie man aus den Gleichungen (25), der Kontinuitätsgleichung (32) in Nr. 39 und den Gleichungen (3) und (4) in Nr. 33 leicht ableiten kann, genau dieselbe Differentialgleichung (39), wenn man darin φ durch s ersetzt[1]), also

$$\text{(39a)} \qquad \frac{\partial^2(rs)}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2(rs)}{\partial r^2}.$$

1) Bei der Ableitung ist zu berücksichtigen, daß wegen der vorausgesetzten Symmetrie um O Verrückungen, Geschwindigkeiten, örtliche Druckvariationen usw. nur in der Richtung des Radius r vorkommen. Die Kontinuitätsgleichung wird daher

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \frac{\varrho}{r^2}\frac{\partial(r^2\mathfrak{u}_r)}{\partial r} = 0,$$

denn in dem allgemeinen Ausdruck für div $\mathfrak{u}$ in Kugelkoordinaten

$$\operatorname{div}\mathfrak{u} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2\mathfrak{u}_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial(\sin\vartheta\,\mathfrak{u}_\vartheta)}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial\mathfrak{u}_\omega}{\partial\omega}$$

42. Stehende Kugelwellen. Eigenschwingungen konischer Röhren. Konische Pfeifen. Mittels Kugelwellen lassen sich die Schwingungen von konischen Röhren (Pfeifen) behandeln. Denn die Bewegung der freien Kugelwellen wird nicht geändert, wenn man parallel der Bewegungsrichtung, also in Richtung der Radien r, feste Wände aufstellt. Diese grenzen konische Röhren ab.

Die Eigenschwingungen dieser Röhren sind aber stehende Schwingungen. Man erhält diese durch Übereinanderlagerung einer von O divergierenden und einer nach O konvergierenden Welle. Einfacher wird die Rechnung, wenn man wie bei zylindrischen Pfeifen die Methode der Partikularintegrale benutzt, d. h. eine der Bernoullischen Lösung analoge Lösung der Gleichung (39) durch Zerspaltung sucht. Die Rechnung ist, da die Form der Differentialgleichung dieselbe ist, im wesentlichen die gleiche. Man setzt $r\varphi$ bezw. s als Produkt zweier Funktionen an, von denen die eine nur von r, die andere nur von t abhängt. Für letztere kann man gleich die einfache Sinusfunktion einführen, d. h. man nimmt von vornherein an, daß man es mit einer Schwingung zu tun hat, die einem einfachen reinen Ton entspricht. Die Rechnung ist von Barton durchgeführt worden.[1]) Sie ist im wesentlichen gleich derjenigen für zylindrische Pfeifen; nur die transzendenten Gleichungen, aus denen die Eigenfrequenzen berechnet werden, sind andere als dort. Die Bewegungsgleichung (39) geht durch den Ansatz

$$r\varphi = (r\varphi)^* \sin(nt + \vartheta), \tag{52}$$

bei dem $(r\varphi)^*$ nur von r abhängen soll, über in

$$\frac{d^2(r\varphi)^*}{dr^2} + \frac{n^2}{c^2}(r\varphi)^* = 0. \tag{53}$$

---

fällt das 2. und 3. Glied rechts aus dem oben genannten Grunde weg. Die Eulerschen Gleichungen reduzieren sich auf die eine Gleichung

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial r} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial (r^2 u_r)}{\partial t} = -\frac{r^2}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial r},$$

indem man noch beiderseits mit r^2 multipliziert.

Behandelt man diese Gleichungen genau so wie die Gleichung (1a) und (2a) in Nr. 33 und berücksichtigt schließlich, daß $\frac{\partial^2(r\varrho)}{\partial r^2} = r\frac{\partial^2 \varrho}{\partial r^2} + 2\frac{\partial \varrho}{\partial r}$ ist, so erhält man die gesuchte Gleichung.

1) E. H. Barton, Text-Book on Sound (London 1908), S. 254. — Philos. Magazine (6) **15**. 1908. S. 69.

Hieraus folgen die Normalfunktionen in der allgemeinen Form

$$(r\varphi)_k^* = A_k \sin\frac{n_k r}{c} + B_k \cos\frac{n_k r}{c}. \tag{54}$$

Je nach den Grenzbedingungen ist A_k oder B_k gleich Null zu setzen und die Frequenzen n_k haben verschiedene Werte.

Fall 1. Beide Enden des Kegelstumpfes geschlossen.[1]) Die Radien der beiden schließenden Kugelflächen seien r_1 und r_2, wobei $r_1 < r_2$ ist. Die Grenzbedingungen sind

$$u_r \text{ bezw. } \mathfrak{u}_r = 0 \text{ für } r = r_1 \text{ und } r = r_2. \tag{55}$$

Indem man durch Differentiation von (54) $\mathfrak{u}_r$ bildet und in (55) einsetzt, erhält man die Gleichungen für n

$$\begin{cases} A\left(\frac{nr_1}{c}\cos\frac{nr_1}{c} - \sin\frac{nr_1}{c}\right) = B\left(\frac{nr_1}{c}\sin\frac{nr_1}{c} + \cos\frac{nr_1}{c}\right) \\ A\left(\frac{nr_2}{c}\cos\frac{nr_2}{c} - \sin\frac{nr_2}{c}\right) = B\left(\frac{nr_2}{c}\sin\frac{nr_2}{c} + \cos\frac{nr_2}{c}\right) \end{cases} \tag{56}$$

und hieraus die beiden einander gleichen Werte des Quotienten der Amplituden A und B

$$\frac{B}{A} = \frac{\frac{nr_1}{c}\cos\frac{nr_1}{c} - \sin\frac{nr_1}{c}}{\frac{nr_1}{c}\sin\frac{nr_1}{c} + \cos\frac{nr_1}{c}} = \frac{\frac{nr_2}{c}\cos\frac{nr_2}{c} - \sin\frac{nr_2}{c}}{\frac{nr_2}{c}\sin\frac{nr_2}{c} + \cos\frac{nr_2}{c}}. \tag{57}$$

Durch Gleichsetzen der beiden Werte von $\frac{B}{A}$ ergibt sich die transzendente Bestimmungsgleichung für n. Zur Vereinfachung setzt man

$$\frac{nr_1}{c} = \operatorname{tg}\theta_1, \quad \frac{nr_2}{c} = \operatorname{tg}\theta_2 \tag{58}$$

und erhält damit nach einfachen Umformungen

$$\frac{B}{A} = \operatorname{tg}\left(\theta_1 - \frac{nr_1}{c}\right) = \operatorname{tg}\left(\theta_2 - \frac{nr_2}{c}\right). \tag{57a}$$

Die Bestimmungsgleichung für n wird also

$$\operatorname{tg}\left(\theta_1 - \frac{nr_1}{c}\right) = \operatorname{tg}\left(\theta_2 - \frac{nr_2}{c}\right) \tag{59}$$

1) Streng genommen müssen die Verschlußflächen Kugelflächen um den Mittelpunkt O sein. Bei nicht sehr großen Kegelwinkeln können diese aber praktisch durch Ebenen ersetzt werden.

mit der Lösung

$$\frac{nr_1}{c} - \theta_1 = \frac{nr_2}{c} - \theta_2 \pm k\pi \qquad (k = 0, 1, 2 \ldots) \tag{60}$$

oder mit Wiedereinführung von $\frac{nr_1}{c}$ und $\frac{nr_2}{c}$

$$\frac{nr_1}{c} - \operatorname{arc\,tg} \frac{nr_1}{c} = \frac{nr_2}{c} - \operatorname{arc\,tg} \frac{nr_2}{c} \pm k\pi. \tag{61}$$

Hier ist unter arc der kleinste zu dem betreffenden Tangenswert gehörige Bogen (Hauptwert) verstanden; sonst könnte das Glied $k\pi$ wegbleiben. Die Gleichung (60) läßt sich mit anderer Anordnung der Glieder schreiben

$$\frac{nr_2}{c} - \frac{nr_1}{c} \pm k\pi = \theta_2 - \theta_1 .$$

Und daraus folgt, wenn man beiderseits die Tangensfunktion bildet

$$\operatorname{tg}\left(\frac{nr_2}{c} - \frac{nr_1}{c}\right) = \operatorname{tg}(\theta_2 - \theta_1) = \frac{\operatorname{tg}\theta_2 - \operatorname{tg}\theta_1}{1 + \operatorname{tg}\theta_2 \operatorname{tg}\theta_1} = \frac{\frac{nr_2}{c} - \frac{nr_1}{c}}{1 + \frac{nr_2}{c} \cdot \frac{nr_1}{c}} . \tag{62}$$

Statt beide Radien r_1 und r_2 zu kennen, genügt offenbar die Kenntnis des einen von ihnen, etwa des größeren r_2 und des Verhältnisses $\frac{r_1}{r_2} = \varepsilon$, das hierbei ein echter Bruch ist, und zwar um so kleiner, je näher die vordere Begrenzungsfläche der Kegelspitze liegt; für einen Vollkegel wird $\varepsilon = 0$, da $r_1 = 0$ ist. Setzt man zur Vereinfachung der Schreibweise

$$\frac{nr_2}{c} = x, \quad \text{also} \quad \frac{nr_1}{c} = \varepsilon x , \qquad \left(\frac{r_1}{r_2} = \varepsilon\right), \tag{63}$$

so nehmen die Gleichungen (61) und (62) die Form an

$$\varepsilon x - \operatorname{arc}(\operatorname{tg} \varepsilon x) = x - \operatorname{arc}(\operatorname{tg} x) \pm k\pi \tag{61a}$$

$$\operatorname{tg}[(1-\varepsilon)x] = \frac{(1-\varepsilon)x}{1+\varepsilon x^2} . \tag{62a}$$

Diese gleichbedeutenden Gleichungen für x lassen sich leicht graphisch lösen, am bequemsten in der Form (61a). Sie ergeben zu jedem Werte ε eine unendliche Reihe diskreter Wurzeln x_k. Aus diesen erhält man dann mittels (63) die Frequenzen n_k. Die graphische Lösung erfordert nur die zeichnerische Konstruktion der Ausdrücke $y' = \varepsilon x - \operatorname{arc}(\operatorname{tg} \varepsilon x)$ und $y = x - \operatorname{arc}(\operatorname{tg} x) \pm k\pi$

als Funktionen von x, von denen die letztere unendlich viele parallele (jedesmal um die Strecke π in der Ordinatenrichtung verschobene) Zweige hat. Statt dessen kann man ebenso gut das Glied $\pm k\pi$ zu der Funktion y' hinzufügen, wodurch diese unendlich viele Zweige erhält (Fig. 28). Die Abszissen der Schnittpunkte beider Kurven bezw. Kurvenscharen y und y' sind die gesuchten Wurzeln x_k. Ihre Größe hängt also von dem jeweilig geltenden Werte ε ab. Das bedeutet: bei einer konischen Pfeife kommt es nicht allein auf die Länge derselben $r_2 - r_1$ an, sondern auch auf das Verhältnis $\frac{r_1}{r_2}$. Mit anderen Worten: die Eigenfrequenz hängt außer von der Länge der Pfeife noch von der Entfernung r_1 zwischen der vorderen Mündung und der zu ergänzenden Kegelspitze ab. Je größer diese ist, desto mehr nimmt die konische Pfeife den Charakter einer zylindrischen an, desto geringer ist die Wirkung ihrer Konizität. Wie übrigens aus den Gleichungen (61) oder (62) hervorgeht, hat die Konizität nur bei sehr kleinen Werten von ε merklichen Einfluß. Bei größeren Werten von ε liegen die Schnittpunkte bereits auf den nahezu geradlinigen Teilen der Kurven y und y', und die Frequenzen n werden fast genau dieselben wie bei zylindrischen Pfeifen der gleichen Länge $r_2 - r_1$.

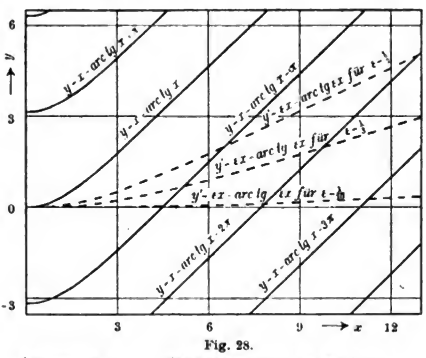


Fig. 28.

Ausgezogen (——): die Kurven $y = x - \operatorname{arctg} x \pm k\pi$, Gestrichelt (------): die Kurven $y' = \varepsilon x - \operatorname{arctg} \varepsilon x$ für die Werte $\varepsilon = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{10}$.

Besonderes Interesse erregt der Spezialfall 1a. Vollkegel mit geschlossener Basis.

Es ist $r_1 = 0$, also $\varepsilon = 0$, und die Bestimmungsgleichung geht über in die bekannte Gleichung

(64)
$$\operatorname{tg} x = x$$

mit den Wurzeln

(65) $x_0 = 0,\ x_1 = 4{,}493,\ x_2 = 7{,}725,\ x_3 = 10{,}904,\ x_4 = 14{,}066, \ldots$

Die Frequenzen werden also

(65a) $$n_1 = \frac{4{,}493\,c}{r_2}, \quad n_2 = \frac{7{,}725\,c}{r_2}, \quad n_3 = \frac{10{,}904\,c}{r_2}, \quad \ldots$$

Der Quotient $\frac{B}{A}$ wird gleich Null, weil θ_1 und $\frac{n r_1}{c} = 0$ sind. Also beschränkt sich die Normalfunktion auf das Glied $A_k \sin \frac{n_k r}{c}$, und die Lösung für eine Partialschwingung wird dargestellt durch das Geschwindigkeitspotential

(66) $$\varphi = \frac{A_k}{r} \sin \frac{n_k r}{c} \sin (n_k t + \vartheta_k).$$

Die Lage der Knotenflächen für die Geschwindigkeit und Verschiebung ergibt sich aus der Gleichung $-\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0$, die hier nach einigen Umformungen die Gestalt erhält

$$\operatorname{tg} \frac{n_k r}{c} = \frac{n_k r}{c},$$

also dieselbe Gleichung (64), welche zur Frequenzbestimmung dient, wenn darin r_2 statt r gesetzt wird. Man findet also überall da Knotenflächen der Geschwindigkeit, wo das Produkt $\frac{n_k r}{c}$ einen der Werte (65) annimmt. Diese Flächen haben nicht gleichen Abstand von einander wie bei zylindrischen Pfeifen; die Abstände näheren sich aber immer mehr einem konstanten Grenzwert, je weiter die Knotenflächen von der Spitze entfernt sind, je höher also die Ordnungszahl k ist; denn mit wachsendem k nähern sich die Differenzen zweier aufeinanderfolgender Wurzeln x_k der Wertereihe (65) immer mehr dem Werte $\pi = 3{,}14159$. Wichtiger als der soeben behandelte Fall ist der folgende.

Fall 2. Beide Enden des Kegelstumpfes offen. Die (näherungsweise richtigen) Grenzbedingungen sind

(67) $$s = 0 \text{ für } r = r_1 \text{ und } r = r_2.$$

Benutzt man hier die Differentialgleichung (39a) von Nr. 41 und als Lösung die Normalfunktion

(68) $$(rs)^* = C \sin \frac{nr}{c} + D \cos \frac{nr}{c},$$

so kann man die beiden aus den Grenzbedingungen folgenden

Gleichungen unmittelbar hinschreiben

$$(69)\qquad C\sin\frac{nr_1}{c}+D\cos\frac{nr_1}{c}=0,\quad C\sin\frac{nr_2}{c}+D\cos\frac{nr_2}{c}=0.$$

Das sind aber Gleichungen von genau derselben Form wie die für zylindrische Pfeifen mit offenen Enden bezw. für solche mit geschlossenen Enden, wenn man nicht s sondern u als Variable nimmt. Die Lösung ist also auch analog. Es wird

$$(70)\qquad \frac{D}{C}=-\operatorname{tg}\frac{nr_1}{c}=-\operatorname{tg}\frac{nr_2}{c},$$

woraus die Bestimmungsgleichung für n folgt

$$(71)\qquad \operatorname{tg}\frac{nr_1}{c}=\operatorname{tg}\frac{nr_2}{c}$$

mit der Lösung

$$(72)\qquad \frac{nr_2}{c}=\frac{nr_1}{c}\pm k\pi \quad \text{d. h. } n_k=\frac{k\pi c}{r_2-r_1},\quad (k=0,1,2\ldots)$$

Man erhält also die vollständige harmonische Partialtonreihe wie für eine beiderseits offene zylindrische Pfeife, deren Länge $l=r_2-r_1$ ist. Die Konizität der Pfeife kommt hier überhaupt nicht in Betracht. Die Lage der Knotenflächen der Verdichtung ist auch dieselbe wie bei der zylindrischen Pfeife. Die Normalfunktion (68) läßt sich mit Einführung des Wertes D aus (69) in einer der beiden Formen schreiben

$$(73)\qquad s_k^*=\frac{C_k'}{r}\sin\frac{n_k(r-r_1)}{c}\quad\text{oder}\quad s_k^*=\frac{C_k''}{r}\sin\frac{n_k(r-r_2)}{c},$$

die volle Lösung also

$$(74)\qquad \begin{aligned} s_k&=\frac{C_k'}{r}\sin\frac{n_k(r-r_1)}{c}\sin(n_kt+\vartheta)\ \text{oder}\\ s_k&=\frac{C_k''}{r}\sin\frac{n_k(r-r_2)}{c}\sin(n_kt+\vartheta_k)\end{aligned}$$

wobei $C_k'=\dfrac{C_k}{\cos\frac{n_kr_1}{c}}$, $C_k''=\dfrac{C_k}{\cos\frac{n_kr_2}{c}}$ ist.

Benutzt man nicht die Differentialgleichung (39a) für s, sondern die entsprechende (39) für das Geschwindigkeitspotential φ, so hat man zur Aufstellung der Grenzbedingungen die durch (43) in Nr. 41 ausgedrückte Beziehung zu benutzen, woraus sofort die-

selben Bedingungsgleichungen folgen. Es ist dabei

$$(75)\quad (r\varphi)^* = A\sin\frac{nr}{c} + B\cos\frac{nr}{c}, \quad r\varphi = (r\varphi)^*\sin(nt+\vartheta),$$

und die Bedingungsgleichungen werden daher

$$(76)\quad A\sin\frac{nr_1}{c} + B\cos\frac{nr_1}{c} = 0, \quad A\sin\frac{nr_2}{c} + B\cos\frac{nr_2}{c} = 0;$$

es tritt also nur A und B an die Stelle von C und D. Diese Beziehungen gelten auch noch, wenn $r_1 = 0$ wird, d. h. für den Spezialfall 2a. Vollkegel mit offener Basis. An der Spitze, die in diesem Fall geschlossen ist, gilt auch die Grenzbedingung $rs = 0$. Daher bleiben alle Gleichungen von (68) bis (76) in Kraft, wenn man darin $r_1 = 0$ setzt. Ein Vollkegel mit offener Basis hat daher als Eigentöne die volle harmonische Partialtonreihe und kann ebenso wie ein Zylinder als Resonator für solche Töne dienen, was durch den Versuch bestätigt wird.

5. Kapitel.

Transversal- oder Biegungsschwingungen von Stäben.

43. Allgemeines. Kinematik der Stabbiegung. Gerade Stäbe. Der Querschnitt soll eine ebene Figur mit einer oder mehreren Symmetrieachsen sein, z. B. ein gleichschenkliges Dreieck (eine Symmetrieachse), ein Rechteck oder eine Ellipse (zwei Symmetrieachsen), ein Quadrat (zwei Paare Symmetrieachsen), ein Kreis (unendlich viele Symmetrieachsen), ein Ring (elliptischer, Kreisring usw. bei hohlen Stäben oder Röhren) und andere Formen (vgl. Fig. 29). Die Größe des Querschnitts q kann längs des Stabes variieren, die Richtung der Symmetrieachsen soll aber überall dieselbe sein, d. h. der Stab soll nicht tordiert sein. Für die schließliche Rechnung wird auch die Veränderlichkeit des Querschnitts fallen gelassen und konstanter Querschnitt angenommen werden.

Fig. 29.

Achse (Mittellinie) des Stabes ist diejenige Linie, welche durch die Schwerpunkte (Trägheitsmittelpunkte) aller aufeinanderfolgenden Querschnitte hindurchgeht. Durch die Festsetzung,

daß diese Linie eine Gerade sein soll, wird auch bei veränderlicher Querschnittsgröße der „gerade" Stab definiert. Besitzt der Querschnitt zwei oder mehr Symmetrieachsen, so ist der gemeinschaftliche Schnittpunkt derselben zugleich der Schwerpunkt des Querschnitts.

Denkt man sich den Querschnitt gleichförmig mit Masse belegt, oder anders ausgedrückt, nimmt man statt des (flächenhaften) Querschnitts eine durch zwei benachbarte Querschnitte mit dem gegenseitigen Abstand dx aus dem Stab herausgeschnittene unendlich dünne körperliche Scheibe mit gleichförmiger räumlicher Dichte, so kann man das Trägheitsmoment dieser Scheibe bzw. des Querschnitts für die Rotation um eine beliebige, in der Ebene dieses Querschnitts liegende, Achse berechnen. Besonders wichtig für die Theorie der Biegung von Stäben ist der Wert dieses Trägheitsmomentes in dem Fall, daß die Drehachse durch den Querschnittsschwerpunkt hindurchgeht. Fällt außerdem noch die Drehachse mit einer der vorhergenannten Symmetrieachsen zusammen, so nimmt das Trägheitsmoment ausgezeichnete Werte an (Maximum, z. B. für elliptischen Querschnitt bei Drehung um die kleine Ellipsenachse; Minimum, z. B. bei Drehung um die große Ellipsenachse; eventuell auch Maximum — Minimum oder schließlich konstanten Wert bei kreisförmigem Querschnitt).

Für die Transversalschwingungen der Stäbe kommen hauptsächlich solche Biegungen in Betracht, bei denen die Querschnitte sich um die Achse des kleinsten Trägheitsmomentes drehen, z. B. bei elliptischem Querschnitt Biegungen parallel der kürzeren Ellipsenachse, bei rechteckigem Querschnitt Biegungen parallel der kürzeren Kante, weil in dieser Richtung der Biegungswiderstand am geringsten ist.

Das Trägheitsmoment des gleichförmig mit Masse belegten Querschnitts q oder besser der Scheibe vom Flächeninhalt q, der Dicke dx und der räumlichen Dichte ϱ, bezogen auf eine durch den Schwerpunkt gehende Drehachse läßt sich immer ausdrücken als Produkt aus der Gesamtmasse und dem Quadrat des Trägheits- oder Gyrationsradius $\varkappa$ für diese Achse[1])

$$J = \mu\varkappa^2 = \varrho q dx \varkappa^2. \tag{1}$$

1) Für den idealen Fall des mit Masse von der Dichte 1 gleichmäßig belegten Querschnitts hat man seine Flächendichte $\varrho dx = 1$ zu setzen.

44. Herleitung der Differentialgleichung mittels der Kräfte und Drehmomente. Die Bewegungsgleichung läßt sich auf verschiedene Weise herleiten, entweder direkt durch Berechnung und Einsetzen der wirkenden Kräfte und Kräftepaare (Drehmomente) in die Newtonschen bzw. Lagrangeschen Bewegungsgleichungen, oder durch Berechnung der kinetischen und potentiellen Energie, die bei der Biegung auftritt, und Anwendung des d'Alembertschen Prinzips der virtuellen Verrückungen oder des Hamiltonschen Prinzips der kleinsten Wirkung und anderer mechanischer Prinzipe.

Die erste, auch bei den Saitenschwingungen und den Longitudinalschwingungen der Stäbe benutzte Methode (vgl. Nr. **16** ff.) erfordert hier die Berechnung aller Kräfte und Kräftepaare, welche auf einen Stabquerschnitt (oder vielmehr ein scheibenförmiges Längselement des Stabes) wirken.

Diese Methode soll auf den einfachsten, praktisch übrigens fast allein in Betracht kommenden Fall angewandt werden, daß der Stab überall gleichen Querschnitt mit einer oder mehreren Symmetrieachsen besitzt, und daß die Biegung parallel einer longitudinalen Symmetrieebene erfolgt, d. h. parallel einer durch die Stabachse und eine der Querschnittssymmetrieachsen gelegten Ebene. Sämtliche Fasern des Stabes bleiben dabei auch im gebogenen Zustand, dieser Biegungsebene parallel, die neutrale Faser mit der Stabachse bleibt in der Biegungsebene selbst.

Ist die Biegungsebene vertikal, so bilden alle in gleicher Höhe liegenden Fasern eine Horizontalschicht und erleiden die gleiche Dehnung. Eine dieser Schichten bleibt ungedehnt und heißt die neutrale Schicht; in dem hier behandelten Fall ist sie zugleich die mittlere, die Stabachse enthaltende Schicht. Die Fasern oberhalb der neutralen Schicht werden gedehnt, diejenigen unterhalb verkürzt.[1]) Wirkt keine den Stab dehnende Kraft neben den biegenden, so behält die mittlere Schicht ihre ursprüngliche natürliche Länge, ist also neutrale Schicht.

Die auf eine Querschnittsscheibe wirkenden Kräfte zerfallen in die Normalkräfte (Zugspannungen) und Tangential- oder Scherungskräfte (Schubspannungen). Die einander parallelen Zugspannungen, welche auf die einzelnen Flächenelemente des Querschnitts wirken, lassen sich nach allgemeinen mechanischen Prin-

1) Wenn der Stab nach unten gebogen wird.

zipien zusammenfassen zu einer resultierenden, im Querschnittsschwerpunkt angreifenden Einzelkraft und einem Kräftepaar mit einem Drehmoment $\mathfrak{M}$, das den Querschnitt um eine in dessen Ebene liegende Achse zu drehen sucht. Die resultierende Einzelkraft bewirkt eine Dehnung des Stabes (der mittleren Schicht desselben).

Nimmt man den einfachsten Fall an, daß die Stablänge (Länge der mittleren Schicht) ungeändert bleibt, so muß die resultierende dehnende Einzelkraft verschwinden, d. h. die Gesamtsumme der auf die einzelnen Flächenelemente des Querschnitts wirkenden Normalkräfte muß Null sein. Das geschieht, wenn die Summe der oberhalb der mittleren Schicht wirkenden Zugkräfte gleich der Summe der unterhalb in entgegengesetzter Richtung wirkenden Druckkräfte ist. Diese beiden Summen sind dann zwei gleiche parallele, aber entgegengesetzte Kräfte und bilden somit ein Kräftepaar, welches eine Drehung des Querschnitts um eine in dessen Ebene liegende und durch den Querschnittsschwerpunkt (also die Stabachse) gehende horizontale Drehungsachse bewirkt (Fig. 30).

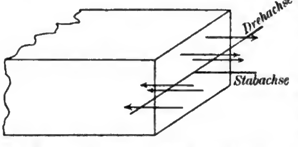


Fig. 30. An einem Stabquerschnitt angreifende Kräfte.

Das Drehmoment $\mathfrak{M}$ des Kräftepaares ist eine Funktion von x, variiert also von einem Querschnitt zum benachbarten um $\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x} dx$, und hängt von dem jeweiligen Deformationszustand, also auch von dem Biegungspfeil v ab, wenn v die Verrückung in der Biegungsrichtung parallel der Biegungsebene bezeichnet. Dazu kommen die Scherungskräfte, die hier alle parallel der Biegungsebene wirken und für jeden Querschnitt eine in die Biegungsebene fallende Resultante $\mathfrak{Y}$ ergeben; diese hängt ebenfalls von x und y ab, und ändert sich von einem zum andern Querschnitt um $\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial x} dx$.

Hieraus sind nun die Kräfte und Drehmomente zu berechnen, welche auf eine von zwei benachbarten Querschnitten begrenzte körperliche Querschnittsscheibe wirken. Die Scheibe habe die Dicke dx und liege zwischen x und $x + dx$. Auf die Vorderfläche (bei x) wirkt das Drehmoment $\mathfrak{M}$ im Sinne des gekrümm-

ten Pfeiles in der Fig. 31, auf die Hinterfläche (bei $x + dx$) wirkt das Moment $\mathfrak{M}^{(x+dx)} = \mathfrak{M} + d\mathfrak{M} = \mathfrak{M} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x} dx$ im Sinne des beigesetzten Pfeiles, d. h. in entgegengesetztem Sinne. Das auf die Scheibe wirkende Moment ist also die Differenz

$$\mathfrak{M}^{(x+dx)} - \mathfrak{M} = d\mathfrak{M} = \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x} dx.$$

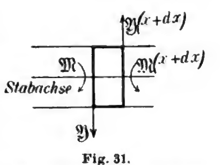


Fig. 31.
Drehmomente der auf eine Querschnittsscheibe wirkenden Kräfte.

Das von den Scherungskräften ausgeübte Drehmoment ist $\mathfrak{Y} dx$. Denn die an der Hinterfläche der Scheibe (bei $x + dx$) angreifende Kraft $\mathfrak{Y}^{(x+dx)}$ zerlegt sich ohne weiteres in die Komponenten $\mathfrak{Y}$ und $d\mathfrak{Y} = \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial x} dx$, beide in der Pfeilrichtung wirkend. Die Komponente $\mathfrak{Y}$ gibt mit der an der Vorderfläche wirkenden Kraft $\mathfrak{Y}$ ein Kräftepaar, das mit dem Hebelarm dx, also mit dem Moment $\mathfrak{Y} dx$ die Scheibe zu drehen sucht. Die noch übrig bleibende Komponente $\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial x} dx$ der Scherungskraft wirkt als reine Translationskraft auf die Scheibe in der y-Richtung.

Der Ansatz der Bewegungsgleichungen liefert für die Translation und die Drehung

$$\mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial x} dx \tag{2}$$

$$J \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x} dx + \mathfrak{Y} dx \tag{3}$$

(v vertikale Verrückung, ε Drehungswinkel, μ Masse, J Trägheitsmoment der Querschnittsscheibe um die durch den Querschnittsschwerpunkt senkrecht zur Biegungsebene xy gehende Drehungsachse). Mit Einführung der Scheibendicke dx, Querschnittsfläche q, der räumlichen Dichte ϱ und des Trägheitsradius $\varkappa$ (vgl. Nr. **43**) und mit Rücksicht darauf, daß der kleine Winkel $\varepsilon = \frac{\partial v}{\partial x}$ gesetzt werden kann, gehen diese Gleichungen über in

$$\varrho q \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial x}, \tag{2a}$$

$$\varrho q \varkappa^2 \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2} = \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x} + \mathfrak{Y}. \tag{3a}$$

Durch Elimination von $\mathfrak{Y}$ erhält man hieraus die eine Gleichung

$$(4) \qquad \varrho q\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \varkappa^2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2}\right) = -\frac{\partial^2 \mathfrak{M}}{\partial x^2}.$$

Nun muß $\mathfrak{M}$ als Funktion der Koordinaten und Deformationen ausgedrückt werden. Offenbar hängt die Form dieser Funktion aufs engste mit der Gestalt der Kurve zusammen, in welche die gerade Stabachse gebogen wird. Verhältnismäßig einfach ist die Berechnung, wenn der Stab gleichförmig gebogen wird, die Stabachse also Kreisform annimmt, wie bei dem einfachsten Fall statischer Biegung. Die Drehmomente bei anderen Biegungsformen unterscheiden sich von dem hierzu erforderlichen nur um Glieder höherer Ordnung, wenn die ganze Deformation klein bleibt. Denn die tatsächlich stattfindende Biegung unterscheidet sich von der kreisförmigen dann nur unendlich wenig. Daher kann näherungsweise das Drehmoment der Kreisbiegung für die bei Schwingungen vorkommenden Biegungen gesetzt werden, wenn, wie vorausgesetzt, alle Verrückungen als verschwindend klein von erster Ordnung betrachtet werden können.

Bei der kreisförmigen Biegung bleiben aus Symmetriegründen alle Stabquerschnitte eben. Das gilt also annähernd auch für jede andere Biegung mit unendlich kleiner Verrückung. Die mittlere, die Achse enthaltende Faser ist zugleich neutrale Faser, erleidet also keine Dehnung und die dehnende Kraft in der x-Richtung fällt, wie bereits angenommen, weg. Auch die scherende Kraft $\mathfrak{Y}$ fällt aus Symmetriegründen weg, was jedoch unwesentlich ist, da sie in Gl. (4) sowieso nicht mehr vorkommt.

Das aus den Normalkräften hervorgehende Drehmoment $\mathfrak{M}$ erhält man folgendermaßen. Die Koordinate parallel der Biegungsebene sei y von der neutralen (mittleren) Schicht an gerechnet, nach oben positiv, nach unten negativ. Die (neutrale) Achse wird zu einem Kreisbogen mit dem Krümmungsradius R gebogen, behält aber ihre Länge l. Eine Faser in der Höhe y über der neutralen Schicht wird gegen ihre natürliche Länge l gedehnt im Verhältnis

$$(5) \qquad \frac{l'}{l} = \frac{R+y}{R} = 1 + \frac{y}{R}$$

wie aus Fig. 32 hervorgeht. Für unterhalb der neutralen Schicht liegende Fasern mit negativem y bedeutet dies eine Verkürzung. Die Dehnung der Längeneinheit der Faser ist also y/R; sie erfor-

dert die dehnende Kraft $E\,d\sigma\,y/R$, wobei E der (Youngsche) Elastizitätsmodul des Stabmaterials, $d\sigma$ der Querschnitt der Faser ist. Diese in der Stabrichtung $(+x)$ wirkende Kraft gibt ein Drehmoment $d\mathfrak{M}$ in bezug auf die senkrecht zur Biegungsebene durch die Stabachse gelegte horizontale Drehachse des Querschnitts

$$d\mathfrak{M} = y E\, d\sigma\, y/R\,.$$

Fig. 32. Biegungsmoment und Stabkrümmung.

Alle oberhalb der neutralen (mittleren) Schicht an den verschiedenen Fasern wirkenden Kräfte zusammen ergeben also ein Drehmoment

$$\mathfrak{M} = \frac{E}{R}\int y^2 d\sigma \tag{6}$$

integriert über den oberhalb der neutralen (mittleren) Schicht liegenden Teil des Stabquerschnitts. Derselbe Ausdruck mit gleichem Vorzeichen ergibt sich für den unteren Teil des Querschnitts unterhalb der Linie AB in Fig. 32. Daher wird das gesamte Drehmoment durch (6) dargestellt, wenn man über den ganzen Querschnitt integriert.

Das Integral $\int y^2 d\sigma$ läßt sich in diesem Fall mittels des Gyrationsradius $\varkappa$ und des (mit Masse von der Dichte 1 belegt gedachten) Stabquerschnitts q ausdrücken, so daß man erhält

$$\mathfrak{M} = \frac{E\varkappa^2 q}{R}\,. \tag{6a}$$

Endlich läßt sich der Krümmungsradius R durch die Differentialquotienten $\frac{\partial y}{\partial x}$ und $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ oder, was auf dasselbe hinauskommt[1]), $\frac{\partial v}{\partial x}$ und $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ ausdrücken, wenn y als Funktion von x die Gestalt der gebogenen Stabachse darstellt. Die allgemeine Formel für den Krümmungsradius einer beliebigen Kurve vereinfacht sich hier näherungsweise zu

1) Da sich v von y nur um die additive Konstante y_0, die Koordinate der Ruhelage, unterscheidet.

(7) $$R = 1 : \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 1 : \frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

da die Neigung der gebogenen Stabachse gegen die Abszissenachse, also $\frac{\partial v}{\partial x}$, überall verschwindend klein bleibt. Somit wird

(6b) $$\mathfrak{M} = E\varkappa^2 q \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Mit diesem Wert geht die Differentialgleichung (4) über in

(8) $$\varrho q \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \varrho q \varkappa^2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} + E\varkappa^2 q \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = 0.$$

Sie gilt in dieser Form für einen homogenen Stab mit überall gleichem und gleichliegendem Querschnitt, wenn die Biegung in einer seiner Hauptbiegungsebenen stattfindet. Gewöhnlich läßt sie sich aber durch Weglassung des mittleren Gliedes, das meist klein ist gegen die beiden anderen, noch weiter vereinfachen in

(8a) $$\varrho q \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + E\varkappa^2 q \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = 0.$$

Bevor sie integriert wird, sollen die Werte der verschiedenen ins Spiel tretenden Energieformen angegeben und die Rayleighsche Herleitung der allgemeineren Form für veränderlichen Querschnitt usw. skizziert werden.

45. Kinetische und potentielle Energie. Die kinetische Energie zerfällt in zwei Teile, die translatorische der Seitenverschiebung, und die rotatorische der Drehbewegung der Querschnittsscheiben. Erstere überwiegt im allgemeinen. Die Werte sind

(9) $$\begin{cases} dU_t = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}\varrho q\, dx \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 \\ dU_r = \frac{1}{2}J\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}\varrho q\, dx \varkappa^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t}\right)^2, \end{cases}$$

wobei Gl. (1) benutzt und berücksichtigt ist, daß der kleine Drehwinkel ε näherungsweise gleich der trigonometrischen Tangente der Kurvenneigung $\partial v/\partial t$ gesetzt werden kann. Für den ganzen Stab ergibt sich somit die gesamte kinetische Energie durch Integration über die Stablänge l

(10) $$U = \frac{1}{2}\int_0^l \varrho q \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^l \varrho q \varkappa^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t}\right)^2 dx = U_t + U_r.$$

Wenn Dichte und Querschnitt konstant sind, können ϱq bezw. $\varrho q \varkappa^2$ als konstante Faktoren vor die Integralzeichen gesetzt werden. Das zweite Glied dieser Summe, die Rotationsenergie, kann bei kleinen Elongationen gegen das erste vernachlässigt werden. Denn $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t}$ oder $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)$ ist die örtliche Änderung der seitlichen Geschwindigkeit der Stabteilchen, wenn man von einem zum andern Stabende geht. Diese Änderung ist von der Größenordnung des Neigungswinkels der Stabachse, also mit diesem selbst klein, so daß $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t}$ von höherer Ordnung verschwindend klein ist als die kleine Geschwindigkeit $\partial v / \partial t$. Es sei z. B. die Schwingungsamplitude am Ende eines fest-freien, d. h. eines an einem Ende fest eingeklemmten, am anderen freien Stabes von der Länge $l = 50$ cm der hundertste Teil der Länge, also 0,5 cm. Die Elongationen sind daher als klein von der ersten Ordnung anzusehen. Der Neigungswinkel der Stabachse ist zwar von Punkt zu Punkt verschieden, aber im Mittel von der Größenordnung des Winkels, den eine von der ausgebogenen Stabspitze zum festen Ende gezogenen Gerade mit der x-Achse einschließt. Dieser Winkel bzw. seine trigonometrische Tangente ist hier im Maximum bei stärkster Ausschwingung $0{,}5 : 50 = 0{,}01$. Man kann nun den mit schwacher Krümmung sich hin- und herbiegenden Stab in erster Näherung durch einen geraden ersetzen, der als starres Pendel um den Einklemmungspunkt als Drehpunkt schwingt. Die Geschwindigkeit der Stabquerschnitte wächst dann offenbar proportional x vom Drehpunkt bis zum freien Ende. Die Geschwindigkeit am freien Stabende bei $x = l$ sei $\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_l$ an der Stelle x ist dann die Geschwindigkeit und ihr Differentialquotient nach x

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_l \cdot \frac{x}{l}; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_l \cdot \frac{1}{l}. \tag{11}$$

Daraus folgt der Wert der beiden Integrale in (10)

$$\int_0^l \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 dx = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2\right]_l; \quad \int_0^l \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t}\right)^2 dx = \frac{1}{l}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2\right]_l$$

und somit das Größenverhältnis der beiden Energiearten

$$U_r : U_t = \frac{\varkappa^2}{l} : \frac{l}{3}.$$

Dieser Wert ist klein, da die Querdimensionen des Stabes und deshalb auch der Gyrationsradius $\varkappa$ des Stabquerschnitts klein sind gegen die Stablänge l. Genauere Rechnungen unter Zugrundelegung der wahren Stabgestalt führen zu demselben Ergebnis bezüglich der Größenordnung.

Diese Betrachtung zeigt nun auch, daß in der Differentialgleichung (8) das zweite Glied, das eng mit der Rotationsenergie zusammenhängt, in den meisten Fällen klein ist gegen die beiden anderen; denn wenn $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t}$ klein ist gegen $\frac{\partial v}{\partial t}$, so gilt das in Anbetracht der Stetigkeit der von der Stabachse gebildeten Kurve erst recht von $\frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial t}$ und das Verhältnis bleibt ungeändert, wenn man alle diese Größen noch einmal nach t differentiiert.

Die potentielle Energie V ergibt sich so. Für einen kreisförmig gebogenen Stab gilt folgende Rechnung. Eine Faser vom Querschnitt $d\sigma$ in der Höhe y über der neutralen Schicht ist von der Länge l auf $l' = l(1 + y/R)$ gedehnt worden nach (5). Die Dehnung der Längeneinheit derselben ist also y/R und die nach den Ausführungen Nr. **44** dazu nötige dehnende Kraft ist $E d\sigma y/R$. Die Dehnung eines Faserelementes der Länge dx ist $y\,dx/R$. Die von der Kraft bei der Dehnung gegen die Molekularkräfte geleistete Arbeit, also die Vermehrung der potentiellen Energie dieses Faserelementes, ist daher[1])

$$(12) \qquad d'V = \frac{1}{2}\frac{y\,dx}{R} \cdot \frac{E\,d\sigma\,y}{R} = \frac{1}{2}\frac{E y^2}{R^2}\,d\sigma\,dx.$$

Durch Integration über den ganzen Querschnitt folgt die potentielle Energie einer Querschnittsscheibe des gebogenen Stabes — diejenige derselben Scheibe im ungebogenen Zustande gleich Null gesetzt —

$$(13) \quad dV = \frac{1}{2}\frac{E\,dx}{R^2}\int y^2 d\sigma = \frac{1}{2}\frac{E\,dx\,\varkappa^2 q}{R^2} = \frac{1}{3} E\varkappa^2 q\,dx\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2.$$

1) Die Deformationsarbeit bei der linearen Dehnung der Längeneinheit um die Strecke e ist immer $\frac{1}{2}Ee^2$ für einen Zylinder von der Länge Eins und dem Querschnitt Eins, also $\frac{1}{2}Ee^2 d\sigma dx$ für die Länge dx und den Querschnitt $d\sigma$. Der Faktor $\frac{1}{2}$ kommt dazu, weil bei der Deformation die der Verschiebung widerstrebende elastische Kraft allmählich (und zwar proportional der Verschiebung) von 0 bis zu ihrem Endwert $E d\sigma y/R$ ansteigt.

Im letzten Gliede ist für R sein Näherungswert nach Gl. (7) gesetzt. Für den ganzen Stab ergibt sich daraus durch Integration über x die potentielle Energie

$$V = \frac{1}{2}\int E\varkappa^2 q \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2 dx. \tag{14}$$

Wenn Elastizität und Querschnitt längs des Stabes konstant sind, kann $E\varkappa^2 q$ als konstanter Faktor vor das Integralzeichen gesetzt werden.

Diese Werte gelten angenähert auch für andere als kreisförmige Biegung, wenn, wie wir es bei den Schwingungen voraussetzen, die Verschiebungen klein sind. Die infolge der Scherung entstehende potentielle Energie ist zu vernachlässigen, weil sie von höherer Ordnung klein wird. Bei kreisförmiger Biegung ist sie Null, weil die Scherung ganz wegfällt.

46. Herleitung der Differentialgleichung und der Grenzbedingungen aus dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen. Die Gleichung (8) bezw. (8a) läßt sich noch auf anderem Wege ableiten. Es soll der von Lord Rayleigh begangene skizziert werden, weil er auch bei Verallgemeinerung der Bedingungen, z. B. wenn Querschnitt oder Dichte oder Elastizität des Stabes längs seiner Achse variiert, verhältnismäßig einfach zum Ziele führt. Rayleigh benutzt das Prinzip der virtuellen Verschiebungen — von ihm Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten genannt — in einer besonderen Form, die hier nichts anderes als das Prinzip der Erhaltung der Energie ist. Man kann also eben so gut dieses letztgenannte Prinzip ohne andere Einkleidung heranziehen. Es genügt hier zur Ableitung der Bewegungsgleichung, weil nur eine einzige Koordinate, die natürlich von der Zeit t abhängt, die Gestalt des Stabes bestimmt, nämlich die Verschiebung v der Stabteilchen in der y-Richtung.

Es sei wieder U die kinetische, V die potentielle Energie des gebogenen Stabes. Dann muß die Summe von kinetischer und potentieller Energie $U + V$ konstant sein, oder was dasselbe besagt, es muß sein

$$\delta U + \delta V = 0, \tag{15}$$

wobei δU und δV die Änderungen sind, welche durch eine Verschiebung der Stabpunkte um $\delta v = \delta y$ in der y-Richtung entstehen, die in der Zeit δt erfolgt.

Mit Benutzung der Werte (10) und (14) für U und V erhält man

$$\delta V = V_{v+\delta v} - V_v = \int_0^l \frac{E\varkappa^2 q}{2}\left[\frac{\partial^2(v+\delta v)}{\partial x^2}\right]^2 dx - \int_0^l \frac{E\varkappa^2 q}{2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2 dx$$

$$= \int_0^l \frac{E\varkappa^2 q}{2}\left[2\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 \delta v}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 \delta v}{\partial x^2}\right)^2\right] dx$$

oder mit Weglassung des von höherer Ordnung kleinen letzten Gliedes in der eckigen Klammer

$$(16) \qquad \delta V = \int_{x=0}^{l} E\varkappa^2 q \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 \delta v}{\partial x^2}\, dx.$$

Dies ist auch direkt aus (14) ableitbar, indem man nach t differentiiert, aber δt statt dt setzt und berücksichtigt, daß

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)\delta t = \delta\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^2 \delta v}{\partial x^2}$$

ist. Die Variation von U erhält man ebenso als

$$(17) \quad \delta U = \int_{x=0}^{l} \varrho q \frac{\partial v}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\,\delta t\, dx + \int_{x=0}^{l} \varrho q \varkappa^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial t}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial t}\right)\delta t\, dx$$

$$= \int_{x=0}^{l} \varrho q \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\,\delta v\, dx + \int_{x=0}^{l} \varrho q \varkappa^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\delta\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) dx,$$

wobei, wie erforderlich, $\partial t = \delta t$ gesetzt ist.

Durch partielle Integration erhält man aus (16) und (17)

$$(16\text{a}) \quad \delta V = \left[E\varkappa^2 q \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial \delta v}{\partial x}\right]_{x=0}^{l} - \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(E\varkappa^2 q \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)\delta v\right]_{x=0}^{l}$$

$$+ \int_{x=0}^{l} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(E\varkappa^2 q \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)\delta v\, dx,$$

$$(17\text{a}) \qquad \delta U = \int_{x=0}^{l} \varrho q \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\,\delta v\, dx + \left[\varrho q \varkappa^2 \frac{\partial^3 v}{\partial x\,\partial t^2}\,\delta v\right]_{x=0}^{l}$$

$$- \int_{x=0}^{l} \frac{\partial}{\partial x}\left(\varrho q \varkappa^2 \frac{\partial^3 v}{\partial x\,\partial t^2}\right)\delta v\, dx,$$

oder wenn E, q, ϱ konstant sind, und wenn, was gestattet ist, $\frac{\partial \delta v}{\partial x}$ für $\delta\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)$ gesetzt wird,

$$(16\text{b})\quad \delta V = Eq\varkappa^2\left\{\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial \delta v}{\partial x}\right]_{x=0}^{l} - \left[\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\delta v\right]_{x=0}^{l} + \int\limits_{x=0}^{l}\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}\delta v\, dx\right\},$$

$$(17\text{b})\quad \delta U = \varrho q\int\limits_{x=0}^{l}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\delta v\, dx + \varrho q\varkappa^2\left[\frac{\partial^3 v}{\partial t^2\partial x}\delta v\right]_{x=0}^{l}$$
$$- \varrho q\varkappa^2\int\limits_{x=0}^{l}\frac{\partial^4 v}{\partial t^2\partial x^2}\delta v\, dx.$$

Diese Werte in (15) eingesetzt geben die Gleichung (18), welche für alle mit den Bedingungen des Problems verträglichen Werte der Verrückung δv erfüllt werden muß:

$$(18)\quad \int\limits_{x=0}^{l}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(E\varkappa^2 q\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) + \varrho q\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\varrho q\varkappa^2\frac{\partial^3 v}{\partial x\,\partial t^2}\right)\right]dx\,\delta v$$
$$+\left[E\varkappa^2 q\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\delta\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\varrho q\varkappa^2\frac{\partial^3 v}{\partial x\,\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(E\varkappa^2 q\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)\right)\delta v\right]_{x=0}^{l} = 0$$

oder einfacher, wenn E, q, ϱ konstant sind,

$$(18\text{a})\quad \int\limits_{x=0}^{l}\left[Eq\varkappa^2\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \varrho q\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \varrho q\varkappa^2\frac{\partial^4 v}{\partial t^2\partial x^2}\right]dx\,\delta v$$
$$+\left[Eq\varkappa^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\delta\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\varrho q\varkappa^2\frac{\partial^3 v}{\partial t^2\partial x} - Eq\varkappa^2\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)\delta v\right]_{x=0}^{x=l} = 0.$$

Da die Werte δv ganz beliebig sind, wofern sie nur die Bedingungen des Problems erfüllen, hier also die Bedingung, daß die Verschiebung v und ebenso der Neigungswinkel der Stabachse d. h. $\partial v/\partial x$ sich stetig mit x ändert, so kann der Gleichung nur genügt werden, indem man alle in eckigen Klammern stehenden Ausdrücke einzeln gleich Null setzt. Das liefert, wie ersichtlich, wenn E, q, ϱ konstant sind, sofort die frühere Differentialgleichung (8) außerdem aber auch noch die in diesem Falle an den Enden des Stabes zu erfüllende Grenzbedingung

$$(19)\quad Eq\varkappa^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\delta\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \varrho q\varkappa^2\left(\frac{\partial^3 x}{\partial x\partial t^2} - c^2\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)\delta v = 0,\quad \left(c^2 = \frac{E}{\varrho}\right)$$

die in den gewöhnlich vorkommenden Fällen in mehrere Einzel-

bedingungen zerfällt. Denn wenn auch Befestigungsarten des Stabes denkbar sind derart, daß die dadurch entstehenden Zwangskräfte ein bestimmtes Verhältnis zwischen Zunahme der Ausbiegung δv und Neigung $\delta\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)$ am Stabende bewirken, so haben die gewöhnlichen Befestigungsarten wie Einklemmen des Stabes usw. doch andere einfachere Wirkung. In jenem Falle würde sich aus (19) durch Einsetzen des vorgeschriebenen Wertes des Verhältnisses $\delta v : \delta\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)$ eine recht komplizierte Grenzbedingung ergeben. In den praktisch zu berücksichtigenden Fällen sind die Bedingungen wesentlich einfacher.

47. Die vier möglichen Arten von Grenzbedingungen und ihre mathematische Formulierung. Es sind vier Fälle denkbar.

1) Das Stabende ist frei. Dann ist Variation der Ausbiegung δv und Variation der Neigung $\delta\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)$ willkürlich wählbar, und die Gl. (19) wird nur erfüllt, wenn gleichzeitig

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2} - c^2 \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0. \tag{20}$$

ist. Die zweite dieser Bedingungen vereinfacht sich zu $\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0$, wenn die Drehbewegung der Stabquerschnitte vernachlässigt werden kann, wenn also die vereinfachte Differentialgleichung (8a) gilt.

2) Das Stabende ist eingeklemmt oder eingespannt, d. h. so befestigt (durch eine Zwangskraft und ein Zwangsdrehmoment festgehalten), daß es weder seitlich ausweichen, noch sich drehen kann. Es sind also Variation der Ausbiegung und Variation der Neigung gleich Null zu setzen, so daß die Bedingungsgleichungen lauten

$$\delta\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0 \quad \text{und} \quad \delta v = 0 \tag{21}$$

oder, wenn die ursprünglich gerade Stabachse zugleich Koordinatenachse ist

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad v = 0. \tag{21a}$$

3) Das Stabende ist drehbar gelagert (gestützt, engl. supported), d. h. so befestigt (durch eine Zwangskraft festgehalten), daß es nicht seitlich ausweichen, wohl aber um eine im End-

querschnitt gelegene Achse sich drehen kann. Praktisch kann dies durch Anstemmen der schwach gewölbten Endfläche gegen eine feste Wand erreicht werden. Daher auch die Bezeichnung „angestemmtes Ende" statt der nicht sehr glücklichen „unterstütztes Ende" als Übersetzung von supported. Dabei ist $\delta v = 0$, aber die Variation der Neigung $\delta\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)$ ist willkürlich. Die Grenzbedingungen werden also

$$(22) \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad \text{und} \quad \delta v = 0.$$

4) Das Stabende ist gerichtet verschiebbar, d. h. es kann seitlich ausweichen, aber seine Richtung (die Neigung der Stabachse) wird durch ein Zwangsdrehmoment festgelegt. Dann ist δv willkürlich, aber die Neigungsvariation $\delta\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0$. Also werden die Grenzbedingungen

$$(23) \qquad \delta\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2} - c^2 \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0.$$

Auch hier gilt die Bemerkung am Schluß von Fall 1.

Nur die beiden ersten Fälle haben Bedeutung für die Akustik erlangt. Der vierte Fall scheidet als nicht realisierbar ganz aus. Der dritte Fall läßt sich zwar verwirklichen, z. B. durch Einkeilen eines Stabes zwischen zwei ebene oder flach gewölbte Widerlager, wie das beim Stimmstock der Streichinstrumente geschieht; er bietet aber akustisch kein Interesse, selbst in dem soeben angeführten Beispiel nicht, weil dort wegen der Kürze des Stabes die Transversalschwingungen erstens nur schwach entwickelt sind und zweitens in so hohen Tonlagen liegen, daß sie keine Rolle spielen.

Da jeder Stab zwei Enden hat, so können die vorstehenden drei bezw. zwei Grenzbedingungen in verschiedenen Kombinationen vereinigt vorkommen. Man erhält so als wichtigste Fälle:

I. frei-freier Stab, beide Enden frei
II. fest-fester „ beide Enden eingeklemmt
III. fest-freier „ ein Ende eingeklemmt, das andere frei.

48. Integration der Differentialgleichung für stehende Schwingungen. Normalfunktionen. In den praktisch vorkommenden Fällen kann man die Drehbewegung der Stabquerschnitte vernachlässigen, weil ihre Energie gegen diejenige der transver-

salen Verschiebung verschwindet, und hat dann statt der Differentialgleichung (8) die vereinfachte Gleichung (8a) von Nr. **44** zu integrieren, die sich schreiben läßt

$$\text{(8b)} \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \varkappa^2 c^2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = 0 \qquad \left(c^2 = \frac{E}{\varrho}\right),$$

wo c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit longitudinaler Wellen in dem Stabe ist.

Diese lineare partielle Differentialgleichung 4. Ordnung läßt sich ähnlich wie die in Nr. **24** behandelte Gleichung 2. Ordnung für die Saitenschwingungen und Longitudinalwellen von Stäben nach der Methode der Partikularlösungen integrieren durch Zerspaltung der Funktion v in ein Produkt, dessen einer Faktor nur von t, dessen andrer nur von x abhängt. Es werde gesetzt

$$\text{(24)} \qquad v = v^{(x)} \cdot v^{(t)}.$$

Durch Einsetzen in (8b) gibt dies nach einfacher Umformung in voller Analogie mit Gl. (28) in Nr. **24**

$$\text{(25)} \qquad \frac{1}{v^{(t)}} \frac{d^2 v^{(t)}}{dt^2} = -\frac{\varkappa^2 c^2}{v^{(x)}} \frac{d^4 v^{(x)}}{dx^4} = -n^2 = -\frac{m^4}{l^4} \varkappa^2 c^2,$$

indem man die Konstante, der beide Seiten gleich sein müssen (vgl. Nr. **24**), mit $-n^2$ oder $-\frac{m^4}{l^4}\varkappa^2 c^2$ bezeichnet. Das gibt die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen 2. bzw. 4. Ordnung

$$\text{(26)} \qquad \frac{d^2 v^{(t)}}{dt^2} = -n^2 v^{(t)} = -\frac{m^4}{l^4} \varkappa^2 c^2 v^{(t)},$$

$$\text{(27)} \qquad \frac{d^4 v^{(x)}}{dx^4} = \frac{n^2}{\varkappa^2 c^2} v^{(x)} = \frac{m^4}{l^4} v^{(x)}.$$

Gleichung (26) besagt, daß die Bewegung jedes Stabpunktes eine sinusförmige (pendelförmige) Schwingung ist, dargestellt durch eine der beiden Funktionen

$$\text{(28)} \quad v^{(t)} = \sin nt = \sin \frac{m^2}{l^2} \varkappa c t \quad \text{oder} \quad v^{(t)} = \cos nt = \cos \frac{m^2}{l^2} \varkappa c t,$$

was man auch gleich von vornherein hätte annehmen können.[1]) Diese Schwingung bedeutet einen einfachen Ton von der (Kreis-)

1) Statt dessen hätte man auch in Gl. (24) $v^{(t)} = e^{int}$ setzen können, was bei der Zerspaltung in den reellen und imaginären Teil wieder auf Gl. (28) führt.

Frequenz oder zyklischen Schwingungszahl n, d. h. von der sekundlichen Schwingungszahl $\frac{n}{2\pi}$. Gl. (27) bestimmt die Phase und Amplitude dieser Schwingung für die verschiedenen Punkte als Funktion von x, also die Form des Stabes bei der Schwingung, die Schwingungsfigur. Als Differentialgleichung 4. Ordnung hat sie ein allgemeines Integral mit vier willkürlichen Konstanten, das sich additiv aus vier voneinander unabhängigen partikulären Integralen zusammensetzt.

Partikuläre Integrale von (27) sind z. B.

$$\sin\frac{mx}{l},\quad \cos\frac{mx}{l},\quad e^{\frac{mx}{l}},\quad e^{-\frac{mx}{l}} \tag{29}$$

oder auch beliebige Summen und Differenzen dieser vier Ausdrücke, wie z. B. die Hyperbelfunktionen[1])

$$\mathfrak{Sin}\frac{mx}{l}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{mx}{l}}-e^{-\frac{mx}{l}}\right) \text{ und } \mathfrak{Cof}\frac{mx}{l}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{mx}{l}}+e^{-\frac{mx}{l}}\right). \tag{29a}$$

Als allgemeines Integral erhält man also z. B.

$$v^{(x)}=A\sin\frac{mx}{l}+B\cos\frac{mx}{l}+C\,e^{\frac{mx}{l}}+D\,e^{-\frac{mx}{l}} \tag{30}$$

oder

$$v^{(x)}=\mathfrak{A}\sin\frac{mx}{l}+\mathfrak{B}\cos\frac{mx}{l}+\mathfrak{C}\cdot\mathfrak{Sin}\frac{mx}{l}+\mathfrak{D}\cdot\mathfrak{Cof}\frac{mx}{l} \tag{30a}$$

(Lamb.)

oder auch

1) Vgl. über die Eigenschaften dieser Funktionen z. B. Jahnke-Emde Funktionentafeln (Math.-Physik. Schr. f. Ingen. u. Stud.) Leipzig 1909 (B. G. Teubner). Es gilt insbesondere

$$\mathfrak{Cof}(-\infty)=\infty,\quad \mathfrak{Cof}\,0=1,\quad \mathfrak{Cof}(+\infty)=\infty;\quad \mathfrak{Cof}(-\alpha)=\mathfrak{Cof}\,\alpha,$$

$$\mathfrak{Sin}(-\infty)=-\infty,\quad \mathfrak{Sin}\,0=0,\quad \mathfrak{Sin}(+\infty)=\infty;\quad \mathfrak{Sin}(-\alpha)=-\mathfrak{Sin}\,\alpha.$$

$$\frac{d\,\mathfrak{Sin}\,\alpha}{d\alpha}=\mathfrak{Cof}\,\alpha,\qquad \frac{d\,\mathfrak{Cof}\,\alpha}{d\alpha}=\mathfrak{Sin}\,\alpha,$$

$$\frac{d^2\mathfrak{Sin}\,\alpha}{d\alpha^2}=\mathfrak{Sin}\,\alpha,\qquad \frac{d^2\,\mathfrak{Cof}\,\alpha}{d\alpha^2}=\mathfrak{Cof}\,\alpha.$$

Diese Funktionen reproduzieren sich also nach je 2 Differentiationen vollständig, auch in bezug auf das Vorzeichen.

$$(30\text{b})\quad \begin{cases} v^{(x)} = A'\left(\cos\frac{mx}{l} + \mathfrak{Cof}\,\frac{mx}{l}\right) + B'\left(\cos\frac{mx}{l} - \mathfrak{Cof}\,\frac{mx}{l}\right) \\ \qquad + C'\left(\sin\frac{mx}{l} + \mathfrak{Sin}\,\frac{mx}{l}\right) + D'\left(\sin\frac{mx}{l} - \mathfrak{Sin}\,\frac{mx}{l}\right) \end{cases}$$

(Rayleigh.)

Die letzte ist die von Lord Rayleigh, die mittlere die von Horace Lamb benutzte Form des Integrals, die wir ebenfalls benutzen wollen. Irgendeins der genannten partikulären Integrale, oder auch die Summe mehrerer von ihnen bzw. das allgemeine Integral, multipliziert mit einem der beiden partikulären Integrale $v^{(t)}$ von Gl. (28), gibt eine mögliche Lösung von (8b). Unter diesen müssen diejenigen ausgewählt bzw. es müssen die Konstanten des allgemeinen Integrals so bestimmt werden, daß auch die Grenzbedingungen befriedigt werden. Statt der Integrale $\sin nt$ und $\cos nt$ kann auch gleich das allgemeine Integral in der Form

$$v^{(t)} = \sin(nt + \vartheta) \quad \text{oder} \quad \cos(nt + \varepsilon)$$

(vgl. Nr. **26**) benutzt werden.

49. Eigenschwingungen des frei-freien Stabes.

I. Fall. Frei-freier Stab. An beiden Enden (bei $x = 0$ und $x = l$) muß sein

$$(31)\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0.$$

Die genannten Differentialquotienten sind allgemein gleich v_t multipliziert mit den folgenden Werten

$$(32)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2 v^{(x)}}{dx^2} = \left[-\mathfrak{A}\sin\frac{mx}{l} - \mathfrak{B}\cos\frac{mx}{l} + \mathfrak{C}\,\mathfrak{Sin}\frac{mx}{l} + \mathfrak{D}\,\mathfrak{Cof}\frac{mx}{l}\right]\dfrac{m^2}{l^2} \\ \dfrac{d^3 v^{(x)}}{dx^3} = \left[-\mathfrak{A}\cos\frac{mx}{l} + \mathfrak{B}\sin\frac{mx}{l} + \mathfrak{C}\,\mathfrak{Cof}\frac{mx}{l} + \mathfrak{D}\,\mathfrak{Sin}\frac{mx}{l}\right]\dfrac{m^3}{l^3}. \end{cases}$$

Hierin $x = 0$ gesetzt gibt

$$(32\text{a})\quad \begin{cases} \left(\dfrac{d^2 v^{(x)}}{dx^2}\right)_{x=0} = [-\mathfrak{B} + \mathfrak{D}]\dfrac{m^2}{l^2} = 0; \\ \left(\dfrac{d^3 v_x}{dx^3}\right)_{x=0} = [-\mathfrak{A} + \mathfrak{C}]\dfrac{m^3}{l^3} = 0, \\ \text{also} \\ C = \mathfrak{A} \quad \text{und} \quad \mathfrak{D} = \mathfrak{B}, \quad \text{wenn} \quad m > 0 \text{ ist,} \end{cases}$$

so daß nunmehr wird

(33) $$v^{(x)} = \mathfrak{A}\left(\sin\frac{mx}{l} + \mathfrak{Sin}\frac{mx}{l}\right) + \mathfrak{B}\left(\cos\frac{mx}{l} + \mathfrak{Cos}\frac{mx}{l}\right),$$

also übereinstimmend mit der Rayleighschen Form (30b), wenn darin $B' = D' = 0$ gesetzt wird.

Für das Ende bei $x = l$ erhält man die beiden Grenzbedingungen, aus denen m und der Quotient $\mathfrak{B}:\mathfrak{A}$ bestimmt werden:

(32b) $$\begin{cases} \left(\frac{d^2 v^{(x)}}{dx^2}\right)_{x=l} = [\mathfrak{A}(-\sin m + \mathfrak{Sin}\, m) + \mathfrak{B}(-\cos m + \mathfrak{Cos}\, m)]\frac{m^2}{l^2} = 0 \\ \left(\frac{d^3 v^{(x)}}{dx^3}\right)_{x=l} = [\mathfrak{A}(-\cos m + \mathfrak{Cos}\, m) + \mathfrak{B}(-\sin m + \mathfrak{Sin}\, m)]\frac{m^3}{l^3} = 0. \end{cases}$$

Hieraus folgt, wenn $m \neq 0$ ist, der Quotient $\mathfrak{B}:\mathfrak{A}$

(34) $$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} = -\frac{\mathfrak{Sin}\, m - \sin m}{\mathfrak{Cos}\, m - \cos m} \quad \text{und} \quad \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} = -\frac{\mathfrak{Cos}\, m - \cos m}{\mathfrak{Sin}\, m + \sin m},$$

also durch Gleichsetzen beider Ausdrücke die transzendente Bestimmungsgleichung für m

(35) $$(\mathfrak{Cos}\, m - \cos m)^2 = \mathfrak{Sin}^2 m - \sin^2 m.$$

Diese geht wegen der Beziehungen

$$\mathfrak{Cos}^2 m - \mathfrak{Sin}^2 m = 1, \quad \cos^2 m + \sin^2 m = 1$$

über in

(35a) $$1 - \cos m\, \mathfrak{Cos}\, m = 0.$$

Die Wurzeln m dieser transzendenten Gleichung hat Lord Rayleigh berechnet in der Form[1])

(36) $$m_i = \tfrac{1}{2}(2i + 1)\pi - (-1)^i \beta_i \qquad (i = 1, 2, 3 \ldots)$$

Die Größe β_i nimmt mit wachsender Ordnungszahl i sehr schnell ab, so daß von $i = 6$ an β erst in der 7. Dezimale geltende Ziffern besitzt und m fast genau ein ungerades Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$ ist. Bis auf 7 Einheiten der 4. Dezimale gilt das schon für $i = 2$.

1) Lord Rayleigh, Theory of Sound 2. Aufl. I. S. 278. S. auch Jahnke-Emde, Funktionentafeln S. 3. Der Index k, der hier in Übereinstimmung mit W. Ritz (Ann. d. Physik (4) **28**. (1909)). S. 752ff. gewählt ist, ist um eine Einheit höher als der von Rayleigh benutzte (z. B. ist m_2 in dieser Zählung identisch mit dem m_1 von Rayleigh, β_2 mit β_1 usw.). Dies geschieht, um die Reihe der „Stabnormalfunktionen" $v^{(x)}$ durch die beiden Funktionen $v_0^{(x)}$ und $v_1^{(x)}$ vervollständigen zu können, die bei Entwicklungen nach diesen Funktionen hinzugefügt werden müssen.

Statt der Rayleighschen nehmen wir hier die Form

(36a) $$m_k = \tfrac{1}{2}(2k-1)\pi + (-1)^k \beta_k \qquad (k=0,1,2,3,4\ldots).$$

Das k dieser Formel entspricht $i+1$ der Rayleighschen Formel. Für $k=0$ und $k=1$, d. h. $i=-1$ und $i=0$ wird

$$\beta_0 = \beta_1 = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad m_0 = m_1 = 0.$$

Tabelle 9 enthält die Zahlenwerte der ersten acht Wurzeln m_k (und der Größen β_k) nach der Bezeichnung von (36a).

Tabelle 9.

Wurzeln m der Gleichung $1 - \cos m\, \mathfrak{Cof}\, m = 0$, zugleich Wurzeln m von $\operatorname{tg}\frac{m}{2} + \mathfrak{Tg}\frac{m}{2} = 0$ und $\operatorname{tg}\frac{m}{2} - \mathfrak{Tg}\frac{m}{2} = 0$.

k	m_k	k	m_k
0	0	1	0
2	$\frac{3\pi}{2} + 0{,}01765 = 4{,}73004$	3	$\frac{5\pi}{2} - 0{,}00078 = 7{,}85320$
4	$\frac{7\pi}{2} + 0{,}00003 = 10{,}99561$	5	$\frac{9\pi}{2} - 0{,}00000 = 14{,}13717$
6	$\frac{11\pi}{2} = 17{,}27876$	7	$\frac{13\pi}{2} = 20{,}42035$
.	. . . .	.	. . . .

Gleichung (35a) läßt sich umformen in

(35b) $$\begin{cases} 1 - \cos m\, \mathfrak{Cof}\, m \\ = 2\cos^2\frac{m}{2}\, \mathfrak{Cof}^2\frac{m}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{m}{2} + \mathfrak{Tg}\frac{m}{2}\right)\left(\operatorname{tg}\frac{m}{2} - \mathfrak{Tg}\frac{m}{2}\right) = 0\,. \end{cases}$$

Die Wurzeln dieser Gleichung zerfallen in zwei Gruppen, nämlich die Wurzeln der beiden Gleichungen

(35c) $$\operatorname{tg}\frac{m}{2} + \mathfrak{Tg}\frac{m}{2} = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{tg}\frac{m}{2} - \mathfrak{Tg}\frac{m}{2} = 0.$$

Die erste Gruppe umfaßt die Werte m_k mit geradem Index k (einschließlich $k=0$), die andre die Werte mit ungeradem k. Beide Gruppen alternieren in bezug auf die Größe der Wurzeln. Die

Faktoren $\cos^2\frac{m}{2}$ und $\mathfrak{Cof}^2\frac{m}{2}$ in Gl. (35b) geben keine Wurzeln, wenn man sie gleich Null setzt. Denn $\mathfrak{Cof}\frac{m}{2}$ wird für keinen reellen Wert m zu Null, und $\cos\frac{m}{2}$ wird zwar für $m=\pi$, 3π, $5\pi\ldots$ zu Null; aber diese Werte sind keine Wurzeln von (35a), da $1-\cos m\,\mathfrak{Cof}\,m$ durch Einsetzen derselben die von Null verschiedenen Werte $1+\mathfrak{Cof}\,\pi$, $1+\mathfrak{Cof}\,3\pi$ usw. erhält.

Zu jedem Werte m_k ergibt sich aus (34) ein Wert des Quotienten $\mathfrak{B}:\mathfrak{A}$, der aber verschiedene äußere Form annehmen kann. Es ist also $\mathfrak{B}$ durch $\mathfrak{A}$ bestimmt; $\mathfrak{A}$ wird durch die willkürlich wählbare Energie der Schwingung bestimmt. Die Funktion $v^{(x)}$, d. h. die Normalfunktion, welche hier die Form der Schwingungsfigur des Stabes angibt, läßt sich daher in den beiden gleichbedeutenden Formen hinschreiben, wobei die Konstante $\mathfrak{A}$ ganz weggelassen ist, da man sie mit der willkürlichen Amplitudenkonstante des ganzen Produktes $v^{(x)}\cdot v^{(t)}$ vereinigen kann:

$$(37)\qquad \begin{cases} v_k^{(x)}=(\sin m_k-\mathfrak{Sin}\,m_k)\left[\cos\frac{m_k x}{l}+\mathfrak{Cof}\,\frac{m_k x}{l}\right] \\ \qquad -(\cos m_k-\mathfrak{Cof}\,m_k)\left[\sin\frac{m_k x}{l}+\mathfrak{Sin}\,\frac{m_k x}{l}\right], \\ v_k^{(x)}=(\cos m_k-\mathfrak{Cof}\,m_k)\left[\cos\frac{m_k x}{l}+\mathfrak{Cof}\,\frac{m_k x}{l}\right] \\ \qquad +(\sin m_k+\mathfrak{Sin}\,m_k)\left[\sin\frac{m_k x}{l}+\mathfrak{Sin}\,\frac{m_k x}{l}\right]. \end{cases}$$

Die einfach pendelförmige (harmonische) k^{te} Teilschwingung dieses Schwingungstypus wird mit diesem Werte $v^{(x)}$

$$(38)\qquad v_k=a_k v_k^{(x)}\sin(n_k t+\vartheta_k)=a_k v_k^{(x)}\sin\left(\frac{m_k^2}{l^2}\varkappa c t+\vartheta_k\right).$$

Statt des Sinus kann man auch, mit entsprechender Änderung der Phasenkonstante ϑ_k den Kosinus setzen. a_k ist Amplitudenkonstante, in der die oben weggelassene Konstante mit enthalten ist.

Die Partialschwingungen zerfallen in zwei Gruppen, die eine mit geradem Index k, die andere mit ungeradem Index. Die erste umfaßt diejenigen, bei welchen die Stabmitte ein Schwingungsbauch, die zweite diejenigen, wo sie ein Knoten ist. Im ersten Fall sind die Normalfunktionen, bezogen auf die Stabmitte, gerade, im

zweiten Fall ungerade Funktionen. Die den Indexwerten $k = 0$ und $k = 1$ entsprechenden Schwingungen von unendlich kleiner Frequenz ($m = 0$) sind eine einfache Translationsbewegung des Stabes parallel mit sich selbst ($v_0 =$ konst) und eine Drehung des Stabes ohne Deformation um eine durch die Stabmitte gehende, zur Stabachse senkrechte Achse, $v_1 = \text{konst}\left(x - \frac{l}{2}\right)$. Diese beiden Funktionen müssen bei Entwicklungen nach den Stabnormalfunktionen, die zur Befriedigung eines willkürlichen Anfangszustandes dienen, notwendig mit benutzt werden.

Die zyklische Schwingungsfrequenz der k^{ten} Teilschwingung ist

$$n_k = \frac{m_k^2 \varkappa c}{l^2}; \tag{39}$$

sie hängt durch m_k, l und $\varkappa$ von den Stabdimensionen, durch $c = \sqrt{\frac{E}{\varrho}}$ von den Materialeigenschaften des Stabes ab. Sie ist umgekehrt proportional dem Quadrat der Stablänge und direkt proportional dem Trägheitsradius des Querschnitts. Ein Stab, dessen Querschnitt mehrere Symmetrieebenen hat, kann also bei gleicher Länge verschiedene Töne geben, je nachdem er parallel der einen oder anderen Hauptträgheitsebene schwingt. Z. B. gibt ein Stab mit elliptischem Querschnitt, dessen große Halbachse horizontal steht wie in Fig. 29 einen höheren Ton, wenn er horizontal schwingt, einen tieferen, wenn er vertikal schwingt. Dies ist von vornherein klar; denn im ersten Fall ist bei gleich starker Krümmung die potentielle Energie infolge der größeren Stabdicke parallel der Schwingungsrichtung größer als im zweiten Fall, daher auch die rücktreibende Kraft und die Schwingungsfrequenz.

Dieselben Gleichungen wie für Stäbe mit massivem Querschnitt gelten für ringförmigen Querschnitt, d. h. für Rohre.[1]) Bei gleicher äußerer Umgrenzung des Querschnitts ist der Trägheitsradius $\varkappa$ um so größer, je dünner die Röhrenwand ist, weil dann relativ mehr Flächenteile weiter entfernt von der Drehungsachse liegen als bei dicker Wand. Deshalb sind die Eigentöne dünnwandiger Röhren tiefer als diejenigen massiver Stäbe von gleichem äußeren Durchmesser.

1) Vgl. z. B. W. Elsässer, Über Transversalschwingungen von Röhren. Inaug.-Diss. Marburg 1886.

50. Eigenschwingungen des fest-festen Stabes. II. Fall. Fest-fester Stab. An beiden Enden (bei $x=0$ und $x=l$) muß sein

$$v=0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial v}{\partial x}=0. \tag{40}$$

Diese Grenzbedingungen für das Ende bei $x=0$ auf Gl. (30a) angewandt ergeben analog den Entwicklungen in Nr. **49**, daß $\mathfrak{B}+\mathfrak{D}=0$ und $\mathfrak{A}+\mathfrak{C}=0$ also $\mathfrak{D}=-\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}=-\mathfrak{A}$ sein muß, so daß

$$v^{(x)}=\mathfrak{A}\left(\sin\frac{mx}{l}-\mathfrak{Sin}\frac{mx}{l}\right)+\mathfrak{B}\left(\cos\frac{mx}{l}-\mathfrak{Cof}\frac{mx}{l}\right) \tag{41}$$

wird. Die Anwendung auf das Ende bei $x=l$ gibt dieselbe transzendente Bestimmungsgleichung (35a) $1-\cos m\,\mathfrak{Cof}\,m=0$ für m und somit die Normalfunktion

$$\left\{\begin{aligned} v_k^{(x)} &= (\sin m_k-\mathfrak{Sin}\,m_k)\left[\cos\frac{m_k x}{l}-\mathfrak{Cof}\frac{m_k x}{l}\right] \\ &\quad -(\cos m_k-\mathfrak{Cof}\,m_k)\left[\sin\frac{m_k x}{l}-\mathfrak{Sin}\frac{m_k x}{l}\right], \\ &\text{oder} \\ v_k^{(x)} &= (\cos m_k-\mathfrak{Cof}\,m_k)\left[\cos\frac{m_k x}{l}-\mathfrak{Cof}\frac{m_k x}{l}\right] \\ &\quad +(\sin m_k+\mathfrak{Sin}\,m_k)\left[\sin\frac{m_k x}{l}-\mathfrak{Sin}\frac{m_k x}{l}\right]. \end{aligned}\right. \tag{42}$$

Die Schwingungsfrequenzen n_k sind dieselben wie beim frei-freien Stab.

Das Resultat kann direkt aus dem vorigen abgeleitet werden, indem man daselbst $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ als neue Variable v'', also $\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}$ als $\frac{\partial v''}{\partial x}$ bezeichnet. Die Grenzbedingungen (31) des frei-freien Stabes für die Variable v gehen damit in diejenigen des fest-festen Stabes für die Variable v'' über; die Funktion v'', die aus dem Werte v von Gl. (37) bzw. (38) durch zweimalige Differentiation nach x abgeleitet wird, befriedigt also diese Bedingungen und die Differentialgleichung (8a) bzw. (8b) des Problems und ist daher die gesuchte Lösung. Bis auf das hierbei gleichgültige Vorzeichen stimmt auch Gl. (42) mit dem durch zweimalige Differentiation nach x aus (37) zu erhaltenden Wert überein.

Auch beim fest-festen Stab kann eine unendlich langsame Schwingung mit $m=0$ vorkommen, bei der der Stab sich als Ganzes ohne Deformation bewegt und die kein Interesse bietet.

51. Eigenschwingungen des fest-freien Stabes. III. Fall. Fest-freier und frei-fester Stab. Beide Fälle sind physikalisch identisch, geben aber formal verschiedene Lösungen, weil bei einem das Ende $x=0$, beim andern das Ende $x=l$ fest ist.

Es sei $x=0$ das feste, $x=l$ das freie Ende. Die Grenzbedingungen sind für

$$(43)\qquad \begin{cases} x=0: & v=0 \quad \text{und} \quad \dfrac{\partial v}{\partial x}=0, \\ x=l: & \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0 \quad \text{und} \quad \dfrac{\partial^3 v}{\partial x^3}=0. \end{cases}$$

Die Grenzbedingungen für $x=0$ verlangen wie im Fall II, daß im allgemeinen Integral (30a) $\mathfrak{D}=-\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}=-\mathfrak{A}$ ist, so daß $v^{(x)}$ hier auch die Form (41) wie im Fall II hat, d. h.

$$(44)\qquad v^{(x)}=\mathfrak{A}'\left(\sin\frac{m'x}{l}-\operatorname{Sin}\frac{m'x}{l}\right)+\mathfrak{B}'\left(\cos\frac{m'x}{l}-\operatorname{Cof}\frac{m'x}{l}\right).$$

Die Konstanten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ m sind hier jedoch mit $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, m' bezeichnet worden, um anzudeuten, daß sie andere Werte als dort haben müssen. Aus den Grenzbedingungen für $x=l$ folgt hier nämlich

$$(45)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{d^2 v^{(x)}}{dx^2}\right)_{x=l}=\dfrac{m'^2}{l^2}\,[\mathfrak{A}'(-\sin m'-\operatorname{Sin} m') \\ \qquad\qquad +\mathfrak{B}'(-\cos m'-\operatorname{Cof} m')]=0, \\ \left(\dfrac{d^3 v^{(x)}}{dx^3}\right)_{x=l}=\dfrac{m'^3}{l^3}\,[\mathfrak{A}'(-\cos m'-\operatorname{Cof} m') \\ \qquad\qquad +\mathfrak{B}'(\sin m'-\operatorname{Sin} m')]=0; \end{cases}$$

also, wenn $m \neq 0$ ist,

$$(46)\qquad \frac{\mathfrak{B}'}{\mathfrak{A}'}=-\frac{\sin m'+\operatorname{Sin} m'}{\cos m'+\operatorname{Cof} m'}=+\frac{\cos m'+\operatorname{Cof} m'}{\sin m'-\operatorname{Sin} m'},$$

woraus für m die transzendente Gleichung folgt

$$(47)\qquad 1+\cos m'\operatorname{Cof} m'=0.$$

Ihre Wurzeln sind nach Lord Rayleigh

$$(48)\qquad m_k'=\tfrac{1}{2}(2k-1)\pi-(-1)^k\alpha_k,\quad (k=1,2,3\ldots)$$

Die Größe α_k nimmt mit wachsendem k sehr schnell ab; α_5 ist schon nur etwa $1{,}4\cdot 10^{-6}$, und bereits α_3 ist nur $7{,}8\cdot 10^{-4}$. Die Werte m_k' sind daher auch nahezu ungerade Vielfache von $\frac{\pi}{2}$ wie diejenigen von m_k in Gl. (36); für große k gilt nahezu

$$m_k' = m_k = m_{i-1}\,.$$

Die ersten sieben Werte von m_k' sind in Tabelle 10 angegeben.

Tabelle 10.

Wurzeln m der Gleichung $1 + \cos m \operatorname{\mathfrak{Cof}} m = 0$, zugleich Wurzeln m von $\operatorname{tg}\frac{m}{2} + \operatorname{\mathfrak{Ctg}}\frac{m}{2} = 0$ und $\operatorname{tg}\frac{m}{2} - \operatorname{\mathfrak{Ctg}}\frac{m}{2} = 0$.

k	m'_k	k	m'_k
0	. . . .	1	$\frac{\pi}{2} + 0{,}30431 = 1{,}87510$
2	$\frac{3\pi}{2} - 0{,}01830 = 4{,}69410$	3	$\frac{5\pi}{2} + 0{,}00078 = 7{,}85476$
4	$\frac{7\pi}{2} - 0{,}00003 = 10{,}99554$	5	$\frac{9\pi}{2} + 0{,}00000 = 14{,}13717$
6	$\frac{11\pi}{2} = 17{,}27876$	7	$\frac{13\pi}{2} = 20{,}42035$
.	. . . .	.	. . . .

Die Normalfunktion $v_k^{(x)}$ wird

$$(49)\quad \left\{\begin{aligned} v_k^{(x)} &= (\cos m_k' + \operatorname{\mathfrak{Cof}} m_k')\left(\sin\frac{m_k' x}{l} - \operatorname{\mathfrak{Sin}}\frac{m_k' x}{l}\right) \\ &\quad - (\sin m_k' + \operatorname{\mathfrak{Sin}} m_k')\left(\cos\frac{m_k' x}{l} - \operatorname{\mathfrak{Cof}}\frac{m_k' x}{l}\right), \\ &\text{oder} \\ v_k^{(x)} &= (\sin m_k' - \operatorname{\mathfrak{Sin}} m_k')\left(\sin\frac{m_k' x}{l} - \operatorname{\mathfrak{Sin}}\frac{m_k' x}{l}\right) \\ &\quad + (\cos m_k' + \operatorname{\mathfrak{Cof}} m_k')\left(\cos\frac{m_k' x}{l} - \operatorname{\mathfrak{Cof}}\frac{m_k' x}{l}\right). \end{aligned}\right.$$

Ist $x = 0$ das freie, $x = l$ das feste Stabende, so kehren sich die Grenzbedingungen (43) um, die Normalfunktion $v^{(x)}$ wird

$$(50)\quad \left\{\begin{aligned} v_k^{(x)} &= (\cos m_k' + \operatorname{\mathfrak{Cof}} m_k')\left(\sin\frac{m_k' x}{l} + \operatorname{\mathfrak{Sin}}\frac{m_k' x}{l}\right) \\ &\quad - (\sin m_k' + \operatorname{\mathfrak{Sin}} m_k')\left(\cos\frac{m_k' x}{l} + \operatorname{\mathfrak{Cof}}\frac{m_k' x}{l}\right), \\ &\text{oder} \\ v_k^{(x)} &= (\sin m_k' - \operatorname{\mathfrak{Sin}} m_k')\left(\sin\frac{m_k' x}{l} + \operatorname{\mathfrak{Sin}}\frac{m_k' x}{l}\right) \\ &\quad + (\cos m_k' + \operatorname{\mathfrak{Cof}} m_k')\left(\cos\frac{m_k' x}{l} + \operatorname{\mathfrak{Cof}}\frac{m_k' x}{l}\right). \end{aligned}\right.$$

Sie ist auch durch zweimalige Differentiation nach x aus (49) zu erhalten und unterscheidet sich von jener nur durch die veränderten Vorzeichen von $\mathfrak{Sin}\,\frac{m_k' x}{l}$ und $\mathfrak{Cof}\,\frac{m_k' x}{l}$. Die Gleichungen (46), (47) und (48) bleiben natürlich bestehen.

52. Andere Form der Normalfunktionen. Übereinanderlagerung der Partialschwingungen und Reihenentwicklung nach Normalfunktionen. Die drei genannten Fälle lassen sich auch in der Weise behandeln, daß man den Koordinatenanfangspunkt in die Stabmitte, die Stabenden also nach $x = -\frac{l}{2}$ und $x = +\frac{l}{2}$ verlegt.[1]) Dadurch werden die Formeln zuweilen einfacher und übersichtlicher. Die Normalfunktionen nehmen andere Form an, ebenso die Bestimmungsgleichungen für m. Man erhält z. B. für letztere im Fall I und II (frei-freier und fest-fester Stab), je nachdem in der Stabmitte ein Schwingungsbauch oder -Knoten liegt, die Gleichungen

$$(51) \qquad \operatorname{tg}\frac{m}{2} + \mathfrak{Tg}\,\frac{m}{2} = 0 \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg}\frac{m}{2} - \mathfrak{Tg}\,\frac{m}{2} = 0.$$

Die erste entspricht Schwingungen, die zur Stabmitte symmetrisch sind, $v_k^{(x)}$ ist dabei eine gerade Funktion; die zweite entspricht zur Stabmitte antisymmetrischen Schwingungen, $v_k^{(x)}$ ist dabei eine ungerade Funktion. Beide lassen sich auf Gl. (35a) zurückführen, so daß ihre Wurzeln, wie es ja auch sein muß, mit denen von (35a) identisch werden. Im III. Fall (fest-freier Stab) werden die Gleichungen

$$(52) \qquad \operatorname{tg}\frac{m}{2} - \mathfrak{Ctg}\,\frac{m}{2} = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{tg}\frac{m}{2} + \mathfrak{Ctg}\,\frac{m}{2} = 0,$$

und diese lassen sich auf (47) mit ihren Wurzeln zurückführen.

Für den frei-freien Stab werden die Normalfunktionen bei dieser Lage des Nullpunktes

1) Vgl. z. B. H. Lamb, Dynamical Theory of Sound London. 1910. S. 125.

$$(53\,\mathrm{a})\quad \begin{cases} v_k^{(x)} = \mathfrak{A} \sin \dfrac{m_k x}{l} + \mathfrak{A} \dfrac{\sin \dfrac{m_k}{2}}{\mathfrak{Sin} \dfrac{m_k}{2}} \mathfrak{Sin} \dfrac{m_k x}{l} \quad \text{oder} \\[2ex] v_k^{(x)} = \mathfrak{A} \sin \dfrac{m_k x}{l} + \mathfrak{A} \dfrac{\cos \dfrac{m_k}{2}}{\mathfrak{Cos} \dfrac{m_k}{2}} \mathfrak{Sin} \dfrac{m_k x}{l} \\ \text{antisymmetrische (ungerade) Schwingung für } k = 1, 3, 5 \ldots \end{cases}$$

und

$$(53\,\mathrm{b})\quad \begin{cases} v_k^{(x)} = \mathfrak{B} \cos \dfrac{m_k x}{l} + \mathfrak{B} \dfrac{\cos \dfrac{m_k}{2}}{\mathfrak{Cos} \dfrac{m_k}{2}} \mathfrak{Cos} \dfrac{m_k x}{l} \quad \text{oder} \\[2ex] v_k^{(x)} = \mathfrak{B} \cos \dfrac{m_k x}{l} - \mathfrak{B} \dfrac{\sin \dfrac{m_k}{2}}{\mathfrak{Sin} \dfrac{m_k}{2}} \mathfrak{Cos} \dfrac{m_k x}{l} \\ \text{symmetrische (gerade) Schwingung für } k = 0, 2, 4 \ldots \end{cases}$$

Die Werte der m_k sind die in Tabelle 9 angegebenen.

Wie man durch Ausführung der Integration über die Stablänge erkennt, erfüllen diese Normalfunktionen und natürlich auch die Normalfunktionen der Gl. (37), (42) usw. die Orthogonalitätsbedingung. D. h. es wird

$$(54)\qquad \int\limits_{x=-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} v_h v_k \, dx = 0 \quad \text{wenn } h \gtrless k, \qquad \int\limits_{x=-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} v_k^2 \, dx = \text{const}$$

Dieser Konstanten kann noch ein beliebiger Wert beigelegt werden. Durch Festsetzung desselben ist der Wert der Amplitudenkonstante $\mathfrak{A}$ bezw. $\mathfrak{B}$ in (53) bestimmt. Setzt man fest, daß die Konstante in dem zweiten Integral von (54) den Wert $l/2$ haben soll, so werden die Konstanten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zu

$$(55)\qquad \mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{Sin} \dfrac{m_k}{2}}{\sqrt{\mathfrak{Sin}^2 \dfrac{m_k}{2} - \sin^2 \dfrac{m_k}{2}}}, \qquad \mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{Cos} \dfrac{m_k}{2}}{\sqrt{\mathfrak{Cos}^2 \dfrac{m_k}{2} + \cos^2 \dfrac{m_k}{2}}}.$$

Die zugehörigen speziellen Normalfunktionen nehmen die einfache symmetrisch gebaute Form an:

$$(56)\quad \begin{cases} v_k^{(x)} = \dfrac{\mathfrak{Sin}\frac{m_k}{2}\sin\frac{m_k x}{l} + \sin\frac{m_k}{2}\mathfrak{Sin}\frac{m_k x}{l}}{\sqrt{\mathfrak{Sin}^2\frac{m_k}{2} - \sin^2\frac{m_k}{2}}} & \left(\begin{matrix}k = 3, 5, 7\ldots\\ \text{ungerade}\\ \text{Schwingung}\end{matrix}\right), \\ \text{bezw.} & \\ v_k^{(x)} = \dfrac{\mathfrak{Cof}\frac{m_k}{2}\cos\frac{m_k x}{l} + \cos\frac{m_k}{2}\mathfrak{Cof}\frac{m_k x}{l}}{\sqrt{\mathfrak{Cof}^2\frac{m_k}{2} + \cos^2\frac{m_k}{2}}} & \left(\begin{matrix}k = 2, 4, 6\ldots\\ \text{gerade}\\ \text{Schwingung}\end{matrix}\right). \end{cases}$$

Analoge Funktionen lassen sich für den fest-festen Stab aufstellen. Sie können auch direkt aus (56) durch zweimalige Differentiation nach dem Argument $\frac{m_k x}{l}$ abgeleitet werden.

Für die beiden kleinsten Werte von $m (m_0 = m_1 = 0)$ sind die Normalfunktionen $v_0^{(x)} = \text{konst}$ und $v_1^{(x)} = \text{konst.}' \cdot x$, denn nur diese beiden Funktionen befriedigen für den Wert $m = 0$ die Gleichungen (27) und (31) in Nr. 48 und 49, sowie auch die Orthogonalitätsbedingungen (54). Sollen sie in der zweiten von diesen letzteren den Wert $\frac{l}{2}$ ergeben, so müssen sie die speziellen Formen haben

$$(56\text{a})\qquad v_0^{(x)} = \sqrt{\frac{1}{2}}, \qquad v_1^{(x)} = \frac{\sqrt{6}}{l}x,$$

die als Ergänzung zu (56) gehören.

Die Teilschwingungen können sich übereinanderlagern, denn die Summe mehrerer Lösungen von der Form (38) in Nr. 49, die natürlich mit entsprechend geänderten Normalfunktionen für alle Fälle I bis III gilt, befriedigt die lineare Differentialgleichung (8b) und die Grenzbedingungen ebenso wie eine einzige Lösung allein. Die Gestalt des Stabes während der Schwingungen hängt von Zahl und Art der beteiligten Teilschwingungen ab (Ordnungszahl m_k, Amplitude a_k und Phasenkonstante ϑ_k in Gl. (38)). Durch geeignete Wahl der Werte dieser drei Größen läßt sich wahrscheinlich immer eine solche Reihe aus den v_k bilden, daß der Wert $v^{(0)}$ dieser Reihe und der Wert ihres zeitlichen Differentialquotienten $\frac{\partial v^{(0)}}{\partial t}$ zu einer gegebenen Zeit — etwa zur Zeit $t = 0$ — einem

beliebig vorgegebenen Zustand des Stabes zu dieser Zeit (Anfangszustand) gleich wird, indem $v^{(0)}$ die Lage, $\frac{\partial v^{(0)}}{\partial t}$ die Geschwindigkeit eines jeden Stabpunktes zu dieser Zeit darstellen. Diese beiden Größen sind natürlich Funktionen von x.

Statt der trigonometrischen Funktionen sinus und cosinus treten bei dieser, der Fourierreihe analogen, Reihe die Normalfunktionen oder Eigenfunktionen v_k auf, die sich hier — beim schwingenden Stabe — aus den trigonometrischen und den Hyperbelfunktionen sinus, cosinus, Sinus, Cosinus zusammensetzen.

Der mathematische Nachweis für die Möglichkeit, durch derartige Reihenentwicklungen mit anderen Normalfunktionen als sinus und cosinus allgemein beliebig vorgegebene Funktionen darzustellen, fehlt zurzeit noch; es ist aber aus physikalischen Gründen, wie sie z. B. aus dem ebenbehandelten Problem hervorgehen, sehr wahrscheinlich, daß eine solche Entwicklung, von der die Fourierreihe nur einen Spezialfall bildet, immer möglich ist; in speziellen Fällen läßt sie sich ausführen, womit dann für die dabei benutzten Normalfunktionen der Nachweis erbracht ist.

53. Die Schwingungsfigur des Stabes. Lage der Knoten, Bäuche, Wendepunkte usw. Die Gestalt des Stabes bei einer einfachen Teilschwingung erhält man aus der zugehörigen Normalfunktion $v_k^{(x)}$. Diese stellt als Funktion der Abszisse x die Kurve dar, welche die Stabachse zur Zeit t bildet. Diejenigen Werte x, für welche $v_k^{(x)}$ Null wird, sind die Stellen der Knoten, die Werte x, für welche $v_k^{(x)} = \text{Max.}$, also $\frac{d v_k^{(x)}}{dx} = 0$ wird, die Stellen der Schwingungsbäuche. Außerdem kommen noch in Betracht die Wendepunkte, wo $\frac{d^2 v_k^{(x)}}{dx^2} = 0$, und die Stellen stärkster Krümmung, wo $\frac{d^2 v_k^{(x)}}{dx^2}$ ein Maximum, also $\frac{d^3 v_k^{(x)}}{dx^3} = 0$ ist.

Da die Stabkurve keine Sinuslinie ist wie die Saitenkurve im Fall einer einfachen Teilschwingung (vgl. Nr. **24** ff.), so sind die Knotenabstände ungleich groß und die Bäuche liegen nicht in der Mitte zwischen zwei Knoten. Ihre Lagen müssen in jedem Fall besonders berechnet werden. Um eine Vorstellung von der Gestalt der Kurve zu erhalten, muß man die Ordinaten $v_k^{(x)}$ für zahlreiche Werte von x berechnen. Dies ist besonders von Lord Rayleigh ausgeführt worden, der auch die Resultate andrer Autoren benutzt und angibt. Die folgenden Tabellen sind teils aus der Theory

Tabelle 11.

Ordnungs-zahl der Partial-schwin-gung	Frequenz-parameter m_k	Fest-fester Stab			
		Wende-punkt	Krüm-mungspunkt	Knoten	Bauch
$k = 0$	$m_0 = 0$	——	——	——	——
$k = 1$	$m_1 = 0$	0,5	0 1	——	——
$k = 2$	$m_2 = 4{,}7300$ $(m_2{}^2 = 22{,}372)$	0,2242 0,7758	0 0,5 1	(0) (1)	0,5
$k = 3$	$m_3 = 7.8532$ $(m_3{}^2 = 61{,}674)$	0,1321 0,5 0.8679	0 0,3084 0,6916 1	(0) 0,5 (1)	0, . . 0, . .
$k = 4$	$m_4 = 10{,}9956$ $(m_4{}^2 = 120{,}90)$	0,0944 0,3558 0,6442 0,9056	0 0,2200 0,5 0,7800 1	(0) 0,3593 0,6407 (1)	0, . . 0,5 0, . .
$k = 5$	$m_5 = 14{,}1372$ $(m_5{}^2 = 199{,}86)$	0,0735 0,2768 0 5 0,7232 0,9265	0 0, ... 0, ... 0, ... 0, ... 1	(0) 0,2787 0,5 0,7213 (1)	0, . . 0, . . 0, . . 0, . .
$k = 6$	$m_6 = 17{,}2788$ $(m_6{}^2 = 298{,}55)$	0.0601 0,2265 0,4091 0,5909 0,7735 0,9399	0 0, ... 0, ... 0,5 0, ... 0, ... 1	(0) 0.2281 0.4091 0,5909 0,7719 (1)	0, . . 0, . . 0,5 0, . . 0, . .
		Knoten	Bauch	Wende-punkt	Krümmungs-punkt
		Frei-freier Stab			

Tabelle 12.

Ordnungszahl der Partialschwingung	Frequenzparameter m'_k	Fest-freier Stab (festes Ende bei 0, freies Ende bei 1)			
		Knoten	Bauch	Wendepunkt	Krümmungspunkt
$k=1$	$m'_1 = 1{,}8751$ $(m'^2_1 = 3{,}5160)$	0	1	1	0
$k=2$	$m'_2 = 4{,}6941$ $(m'^2_2 = 22{,}035)$	0 0,7739	0,475 1	0,2261 1	0 0,525
$k=3$	$m'_3 = 7{,}8548$ $(m'^2_3 = 61{,}698)$	0 0,5001 0,8679	0, . . . 0, . . . 1	0,1321 0,4999 1	0 0, . . . 0, . . .
$k=4$	$m'_4 = 10{,}9955$ $(m'^2_4 = 120{,}90)$	0 0,3561 0,6442 0,9056	0, . . . 0, . . . 0, . . . 1	0,0944 0,3558 0,6439 1	0 0, . . . 0, . . . 0, . . .
$k=5$	$m'_5 = 14{,}1372$ $(m'^2_5 = 199{,}86)$	0 0,2788 0,5 0,7232 0,9265	0, . . . 0, . . . 0, . . . 0, . . . 1	0,0735 0,2768 0,5 0,7212 1	0 0, . . . 0, . . . 0, . . . 0, . . .
$k=6$	$m'_6 = 17{,}2788$ $(m'^2_6 = 298{,}55)$	0 0,2281 0,4091 0,5909 0,7736 0,9399	0, . . . 0, . . . 0, . . . 0, . . . 0, . . . 1	0,0601 0,2264 0,4091 0,5909 0,7719 1	0 0, . . . 0, . . . 0, . . . 0, . . . 0, . . .
		Wendepunkt	Krümmungspunkt	Knoten	Bauch
		Frei-fester Stab (freies Ende bei 0, festes Ende bei 1)			

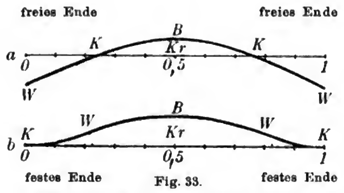


Fig. 33.

a Schwingungsfigur des frei-freien, *b* des fest-festen Stabes bei der Grundschwingung. *K* Knoten, *B* Bauch, *W* Wendepunkt, *Kr* Punkt stärkster Krümmung.

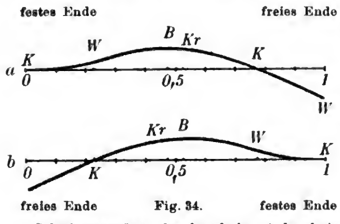


Fig. 34.

a Schwingungsfigur des fest-freien, *b* des frei-festen Stabes bei der Grundschwingung.

of Sound 2. Aufl. entnommen, teils aus den Berechnungen von Strehlke[1]) und von Seebeck[2]).

Da die Normalfunktion des fest-festen Stabes nach Nr. **50** identisch ist mit dem zweiten Differentialquotienten derjenigen des frei-freien, und da sich diese Normalfunktionen nach viermaliger Differentiation immer vollkommen reproduzieren, so ist offenbar, daß Knoten, Bäuche, Wendepunkte, Punkte stärkster Krümmung des frei-freien Stabes in der angegebenen Reihenfolge zusammenfallen mit den Wendepunkten, Punkten stärkster Krümmung, Knoten, Bäuchen des gleich langen fest-festen Stabes bei gleicher Ordnungszahl k und umgekehrt.

Genau das Gleiche gilt für dieselben Punkte des fest-freien und des frei-festen Stabes. Daraus folgt, daß hier die Knoten bezw. Bäuche genau dieselben Abstände vom einen (etwa dem festen) Ende haben wie die Wendepunkte bezw. Punkte stärkster Krümmung vom anderen (also dem freien) Ende. Das ergibt sich daraus, daß der frei-feste Stab nur die Umkehrung des fest-freien ist.

Die Lage der vier Arten charakteristischer Punkte für die Fälle I und II (frei-freier und fest-fester Stab) sind in Tabelle 11, für Fall III (frei-fester bezw. fest-freier Stab) in Tabelle 12 enthalten, soweit sie überhaupt berechnet sind, und zwar bis zum 5. Teilton ($k=5$)[3]). Man sieht, daß die Knoten von Fall I und III

1) F. Strehlke, Poggendorffs Annalen d. Phys. u. Chem. **27**, S. 505 u. **28**, S. 512 (1833).

2) A. Seebeck, ebenda **73**, S. 442 (1848).

3) Die im Handbuch der Physik Bd. II (Akustik) S. 334 angegebenen Zahlen für die Knoten des 4. und 5. Partialtones eines frei-

mit wachsender Ordnungszahl immer mehr zusammenfallen, d. h. der fest-freie Stab schwingt in den höheren Teilschwingungen fast so wie ein frei-freier; die Befestigung des Endes stört nur die nächste Umgebung.

Die Lage der charakteristischen Punkte und die genaue Gestalt des Stabes bei der Grundschwingung ist in den Figuren 33 und 34 dargestellt. Die Gestalt der Stäbe auch für die Oberschwingungen zeigen die Figuren 35 und 36.

Fig. 35 und 36.

Schwingungsfiguren des Grundtons und der beiden ersten Obertöne.

a, b, c bei dem frei-freien Stabe,

d, e, f bei dem fest-freien Stabe

Fig. 35. Fig. 36.

54 Eigenschwingungen des beiderseits drehbar gelagerten (gestützten) Stabes. Von den beiden noch übrigen Fällen IV (beiderseits drehbar gelagerter oder gestützter (angestemmter) Stab) und V. (einerseits gestützter, andrerseits fest eingespannter Stab) gibt der erstere eine verhältnismäßig einfache Lösung. Die Grenzbedingungen sind an beiden Enden ($x=0$ und $x=l$) dieselben, und zwar muß sein für

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ x=l \end{array}\right\} \quad v=0 \text{ und } \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0. \tag{57}$$

Diese auf das Integral $v^{(x)}$ in Gl. (30a) angewandt ergeben für $x=0$ die Bedingungsgleichungen

$$\mathfrak{B}+\mathfrak{D}=0 \quad \text{und} \quad -\mathfrak{B}+\mathfrak{D}=0$$

also

$$\mathfrak{B}=\mathfrak{D}=0, \quad \text{wenn} \quad m=m''>0.$$

Daher ergibt die weitere Anwendung auf das Ende $x=l$

freien Stabes sind nicht ganz genau, wie es scheint. Die Zahlen für den zweiten und vorletzten Knoten gelten eigentlich für den fest-festen Stab, unterscheiden sich aber von den richtigen im Höchstfalle noch nicht um ein Prozent.

$$\mathfrak{A} \sin m'' + \mathfrak{C} \operatorname{\mathfrak{Sin}} m'' = 0 \quad \text{und} \quad -\mathfrak{A} \sin m'' + \mathfrak{C} \operatorname{\mathfrak{Sin}} m'' = 0,$$

also durch Addition und Subtraktion dieser beiden Gleichungen

$$(58) \qquad \mathfrak{A} \sin m'' = 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{C} \operatorname{\mathfrak{Sin}} m'' = 0.$$

Dies ist für $m'' > 0$ nur zu erfüllen durch die Annahme

$$(59) \qquad \mathfrak{C} = 0 \quad \text{und} \quad m_k'' = k\pi, \qquad (k = 1, 2, 3 \ldots).$$

Daher wird hier die Normalfunktion einfach

$$(60) \qquad v_k^{(x)} = \sin \frac{k\pi x}{l},$$

und die ganze Lösung der Schwingungsgleichung [vgl. (38) und (39)]

$$(61) \quad v_k = \mathfrak{A} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin(n_k t + \vartheta_k) = \mathfrak{A} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin\left(\frac{k^2\pi^2 \varkappa c t}{l^2} + \vartheta_k\right), \quad (k = 1, 2, 3 \ldots).$$

Die Normalfunktion ist also dieselbe wie bei einer (beiderseits befestigten) Saite, daher auch die Lage der Knoten und Bäuche. Die Wendepunkte bezw. Punkte stärkster Krümmung fallen zusammen mit den Knoten bezw. Bäuchen. Die Teilschwingungen sind harmonisch wie bei der Saite, umfassen aber nicht alle Glieder, weil die Schwingungsfrequenzen mit dem Quadrat der Ordnungszahl k wachsen. Je nach der Art der Anregung können noch die einen oder anderen von ihnen ausfallen, so daß der Klang eines solchen Stabes sehr obertonarm wird, jedenfalls aber nur sehr hohe Obertöne enthält. Der erste Oberton ist die Doppeloktave, der zweite Oberton bereits gleich dem 9. harmonischen Teilton.

Die Tonhöhe der Grundschwingungen gleich langer beiderseits freier oder fest eingespannter und beiderseits drehbar gelagerter Stäbe steht, wie aus (59) und Tabelle 11 folgt, im Verhältnis

$$(62) \quad m_2^2 : m_1''^2 = 22{,}372 : \pi^2 = 22{,}372 : 9{,}8696 = 2{,}2668.$$

55. Exponentiell gedämpfte Querschwingungen von Stäben. Die Differentialgleichung (8) in Nr. 44 läßt sich noch durch ein Glied ergänzen, welches einer hemmenden, Bewegung vernichtenden Kraft entspricht. Ein sehr einfacher Fall ergibt sich wieder, wenn man die hemmende Kraft der jeweiligen Geschwindigkeit der Stabteilchen proportional annimmt. Man erhält

so exponentiell gedämpfte Sinusschwingungen statt der ungedämpften. Man kann das Glied bei der in Nr. **44** gegebenen Ableitung der Bewegungsgleichung in Gl. (2) bezw. (2a) auf der rechten Seite zu der rücktreibenden Scherungskraft hinzufügen in der Form

(63) $$-\alpha s d x \frac{\partial v}{\partial t}$$

und erhält nach denselben Umformungen wie dort schließlich die Gleichung

(64) $$\varrho q \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \varrho q \varkappa^2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} + E q \varkappa^2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \alpha s \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

oder mit Weglassung des zweiten, zu vernachlässigenden Terms[1])

(64a) $$\varrho q \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \alpha s \frac{\partial v}{\partial t} + E q \varkappa^2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = 0$$

oder

(64b) $$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2\delta \frac{\partial v}{\partial t} + \varkappa^2 c^2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = 0, \qquad 2\delta = \frac{\alpha s}{\varrho q}.$$

δ ist der Dämpfungsfaktor (vgl. Bd. I, Nr. 31 ff.), s ist die Umrißlinie eines Querschnitts, $s d x$ also die Mantelfläche einer dünnen Querschnittsscheibe, α eine von der Form der Umrißlinie und der Natur des umgebenden Mediums abhängige Konstante. Die dämpfende Kraft hat ihren Sitz im wesentlichen an der Staboberfläche, indem dort die angrenzenden Teile des umgebenden Mediums in Bewegung gesetzt werden müssen. Dazu muß auf sie eine vom schwingenden Stab ausgehende Kraft ausgeübt werden, welcher als Reaktion die gleich große entgegengesetzt gerichtete dämpfende Kraft entspricht. Da die auf die Umgebung übertragene Energie im Verlaufe einer ganzen Schwingungsperiode nur zum Teil wieder auf den Stab zurückkehrt, zum Teil aber als Schallenergie in Wellenform (Schallstrahlung) nach außen wegwandert, so findet Energiezerstreuung, also Dämpfung der Stabbewegung statt.

Der Ansatz (63) für die hemmende Kraft ist vielleicht zu speziell, um die Erscheinung im einzelnen richtig darzustellen, doch ergibt sich daraus jedenfalls ein annähernd richtiges Gesamtbild. Die dämpfende Kraft ist danach als äußere auf die Mantelfläche des Stabes wirkende Kraft gedacht. Dämpfende Kräfte infolge innerer Reibung im Stabe selbst sind vernachläsigt. Das

1) Vgl. Nr. **45**.

scheint erlaubt; denn Versuche mit massiven und hohlen Stäben (Röhren), sowie Parallelversuche im Vakuum zeigen den überwiegenden Einfluß der Strahlungsdämpfung.

Die Integration der Gleichung (64a) bezw. (64b) gelingt leicht durch Zerspaltung nach dem Schema von Nr. **48**. Man setzt $v = v^{(x)} \cdot v^{(t)}$ und erhält schließlich die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{d^2 v^{(t)}}{dt^2} + 2\delta \frac{d v^{(t)}}{dt} + n^2 v^{(t)} = 0, \tag{65}$$

$$\frac{d^4 v^{(x)}}{dx^4} - \frac{n^2}{\varkappa^2 c^2} v^{(x)} = 0, \tag{66}$$

mit den Lösungen

$$v^{(t)} = P e^{-\delta t} \sin(\nu t + \vartheta), \qquad \left(\nu = \sqrt{n^2 - \delta^2}\right) \tag{67}$$

$$v^{(x)} = \mathfrak{A} \sin\frac{m x}{l} + \mathfrak{B} \cos\frac{m x}{l} + \mathfrak{C}\, \mathfrak{Sin}\frac{m x}{l} + \mathfrak{D}\, \mathfrak{Cof}\frac{m x}{l}, \tag{68}$$

$$\left(\frac{m^2}{l^2} = \frac{n}{\varkappa c}\right).$$

Die Normalfunktion $v^{(x)}$, also auch die Schwingungsfigur des Stabes ist dieselbe. Der Unterschied gegen die ungedämpften Stabschwingungen besteht außer in dem Abklingen der Schwingungen nur darin, daß die Frequenz ν sich etwas von derjenigen der ungedämpften, n, unterscheidet. Dieser Unterschied ist aber bei allen akustisch in Betracht kommenden Dämpfungsgraden unmerklich. Vgl. dazu die Tabelle 10 in Bd. I.

III. Abschnitt.

Theorie der von zwei Raumkoordinaten abhängigen Schwingungen. Eigenschwingungen von Membranen und Platten.

6. Kapitel.

Eigenschwingungen von Membranen.

56. Differentialgleichungen der Eigenschwingungen von Membranen. Schwingungsenergie. Membranen haben akustisch deshalb Interesse, weil sie zur Aufnahme und Registrierung von Tonwellen dienen. Dazu ist es nötig, die möglichen Schwingungsformen und Eigenfrequenzen der Membranen zu kennen.

Eine Membran ist der ideale Grenzfall einer unendlich dünnen Platte, bei der wegen der verschwindend geringen Dicke die natürliche Steifigkeit keine Rolle mehr spielt. In einer idealen Membran fehlen daher die Scherungskräfte (Schubspannungen). Widerstand gegen Formänderungen (seitliche Verbiegungen) tritt nur auf, wenn mit der Formänderung eine Vergrößerung der Fläche verbunden ist, und zwar infolge der dabei entstehenden oder größer werdenden elastischen Spannung. Nur eine im natürlichen Zustand bereits gespannte Membran ist schwingungsfähig (ebene, über einen Ring gespannte Membran bei der Trommel, kugelförmig gespannte Membran bei Seifenblasen, Luftballons usw.).

Die Spannung (Normaldruck) fällt überall in die Tangentialebene der Membran; bei einer allseitig gleichmäßig gespannten Membran ist sie nach allen Richtungen um jeden Punkt der Membran herum gleich groß. Es können aber auch nach verschiedenen Richtungen hin ungleich gespannte Membranen vorkommen. Ein Beispiel dafür ist eine zwischen zwei parallelen Leisten befestigte Membran, bei der man die Spannung senkrecht zu den Leisten durch Nähern oder Entfernen derselben beliebig ändern kann, oder

der ähnliche von Helmholtz[1]) behandelte Fall einer, ein sehr spitzes Dreieck bildenden Membran, bei der dasselbe durch Auseinanderbiegen der Randleisten erreicht wird. Hier sollen nur gleichförmig gespannte Membranen berücksichtigt werden.

Wird eine gleichförmig gespannte Membran irgendwo durch einen kurzen Schnitt aufgeschnitten, so streben die Schnittränder auseinander, ohne daß seitliche Verschiebungen eintreten, ein Beweis dafür, daß die Spannung in der Membranfläche immer senkrecht auf jedes Linienelement ds wirkt, das man irgendwo auf der Membran als Stück irgend einer Kurve konstruiert. In der unverletzten Membran wird diesen auseinanderziehenden Spannungskräften von denjenigen Kräften das Gleichgewicht gehalten, die von dem jenseits der Schnittlinie liegenden Membranteil ausgehen.

Die gespannte Membran sei im Ruhezustand eben und falle dabei mit der xy-Ebene zusammen. Die gleichförmige, überall gleiche Spannung sei p. Die Verschiebung der Membranpunkte, die in der darauf senkrechten z-Richtung erfolgt, sei als unendlich klein anzusehen. Dann kann man ganz wie bei den Bewegungen der Saite (vgl. Nr. **18**) annehmen, daß jeder Punkt sich nur in der z-Richtung bewegt, seine x- und y-Koordinaten also dauernd behält. Die tatsächlich vorhandene seitliche Verschiebung auch in der x- und y-Richtung wird vernachlässigt, da sie von höherer Ordnung klein ist.

Ein Flächenelement $df = dx\,dy$ am Punkte P der ebenen Membran vergrößert sich bei der Ausbiegung zu $df' = df : \cos\alpha$, wobei α der Neigungswinkel der Tangentialebene im Punkte P', dem neuen Orte von P, ist. Da aber α klein von der ersten Ordnung sein soll, so ist $\cos\alpha$ bis auf quadratische Glieder gleich Eins und mit gleicher Annäherung $df' = df$.

Das um die Strecke w in der z-Richtung ausgebogene Flächenelement $dx\,dy$ wird mit der Kraft

$$\mathfrak{K}_z = p\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) dx\,dy \tag{1}$$

zurückgezogen. Diese ergibt sich analog der rücktreibenden Kraft bei der Saite (vgl. Nr. **18**). Auf die Begrenzungslinien dx und dy des Flächenelementes $df = dx\,dy$, und damit auf das Flächenelement selbst, wirken folgende Kräfte (Fig. 37). Auf die vordere

1) H. v. Helmholtz: Tonempfindungen, Beilage XI.

Kante dx wirkt die Kraft pdx nach vorn, auf die hintere Kante die Kraft pdx nach hinten; analog auf die linke Kante dy die Kraft pdy nach links, auf die rechte Kante pdy nach rechts. Diese Kräfte liegen überall in der Tangentialebene an dem betreffenden Punkt. Die z-Komponenten der Kräfte sind also, da Kräfte, die in der positiven Koordinatenrichtung wirken, positives Vorzeichen bekommen und umgekehrt,

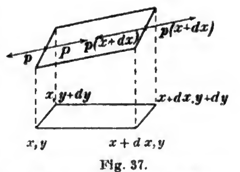


Fig. 37.
Rechteckiges Flächenelement der gebogenen Membran und seine Projektion auf die xy-Ebene.

an der vorderen Kante dx $\qquad -p\,dx\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_y$,

an der hinteren Kante dx

$$p\,dx\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y+dy} = p\,dx\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_y + p\,dx\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_y dy,$$

an der linken Kante dy $\qquad -p\,dy\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_x$,

an der rechten Kante dy

$$p\,dy\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x+dx} = p\,dy\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_x + p\,dy\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_x dx.$$

Die Summe dieser Kräfte, bei der also Glieder höherer als erster Ordnung vernachlässigt werden, indem man die obigen Taylorschen Reihenentwicklungen beim ersten Gliede abbricht, ergibt den Ausdruck (1) für $\mathfrak{K}_z$.

Indem man andererseits das Produkt aus Masse des Membranelementes $\varrho' dx\,dy$ mal Beschleunigung $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ bildet und jener Kraft gleichsetzt (2. Newtonsches Gesetz), folgt die Differentialgleichung der Bewegung

$$(2)\qquad \varrho' dx\,dy\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p\,dx\,dy\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

oder anders geschrieben

$$(2\text{a})\qquad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{p}{\varrho'}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = c^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = c^2\,\Delta w.$$ [1]

1) Δw ist der von Lamé eingeführte „zweite Differentialparameter“ von w, der in rechtwinkligen kartesischen Koordinaten vollständig, d. h. wenn w von allen drei Koordinaten abhängt, lautet

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}.$$

Es ist p die überall gleiche, immer in der Tangentialebene der Membran wirkende Spannung, ϱ' die Masse der Flächeneinheit (Flächendichte) der Membran, $c=\sqrt{\frac{p}{\varrho'}}$ eine der Schallgeschwindigkeit $c=\sqrt{\frac{p}{\varrho}}$ bei Saiten (und Gassäulen) entsprechende Konstante.

Diese Gleichung ist zu integrieren unter der Bedingung (Randbedingung), daß längs der Umgrenzung der Membran überall $w=0$ sein soll, da die Membran notwendigerweise am Rande fest eingespannt sein muß.

Die kinetische Energie eines Membranelementes $dx\,dy$ ist

$$dU=\frac{1}{2}\varrho' dx\,dy\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2, \tag{3}$$

diejenige der ganzen Membran also

$$U=\frac{1}{2}\iint\varrho'\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dx\,dy, \tag{4}$$

integriert über die ganze Fläche der Membran.

Die potentielle Energie ist gleich der Arbeit, welche bei der Dehnung der Membran von den Kräften geleistet werden muß. Diese ist gleich der Vergrößerung der Membranoberfläche, multipliziert mit der Spannung p. Die Vergrößerung eines Flächenelementes $df=dx\,dy$ der ebenen Membran bei Verschiebung seines Mittelpunktes um eine Strecke w in der z-Richtung ist nach der bekannten Formel[1]) für die Berechnung der Größe von krummen Flächen zu bestimmen. Sieht man nämlich wie früher davon ab, daß die Membranpunkte außer der senkrechten Verschiebung w auch horizontale u und v erfahren, die aber von höherer Ordnung klein sind, so erhält man, da hier $\frac{\partial w}{\partial x}$ und $\frac{\partial w}{\partial y}$ klein sind gegen 1,

$$df'=df\sqrt{1+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2}=df\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{dx}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]. \tag{5}$$

Also wird die potentielle Energie eines Flächenelementes $dx\,dy$

$$dV=\frac{p}{2}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy, \tag{6}$$

der ganzen Membran

1) Vgl. Lehrbücher der Integralrechnung.

$$V = \frac{1}{2} \iint p \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx\,dy, \tag{7}$$

integriert über die ganze Membran. Aus diesen Ausdrücken für U und V läßt sich, etwa mittels des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten, die Bewegungsgleichung (2) ableiten.

Die Integration der Differentialgleichung (2a) gelingt leicht bei gewissen einfachen Formen der Begrenzungslinie (Randkurve) der Membran; solche sind die rechteckige (speziell die quadratische) und die kreisförmige, wozu auch die Begrenzung durch zwei konzentrische Kreise, also die ringförmige Membran gehört, sowie der Ring- und Kreissektor, der aus diesen durch zwei Radien ausgeschnitten wird; ferner das gleichseitige Dreieck, das gleichschenklig rechtwinklige und das rechtwinklige Dreieck mit einem Winkel von 30°.[1]) Partikularlösungen erhält man hier wie bei der Saite und dem Stab durch Zerspaltung der Funktion w in einen nur von der Zeit t und einen nur vom Orte (x, y) abhängigen Faktor. Der erstere ergibt sich wieder als Sinus- bezw. Kosinusfunktion, d. h. $\sin nt$ oder $\cos nt$. Der übrigbleibende Faktor $w^{(x,y)}$ muß die Differentialgleichung der Normalfunktionen der Membran befriedigen

$$c^2 \left(\frac{\partial^2 w^{(xy)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w^{(xy)}}{\partial y^2} \right) + n^2 w^{(xy)} = 0. \tag{8}$$

57. Rechteckige Membran. Partialschwingungen und allgemeinste Form der Eigenschwingungen. Rechteckige Membran. Die lange Seite sei a, die kurze b; a sei parallel der x-Achse, b parallel der y-Achse, ein Eckpunkt sei der Koordinatenursprung $x = 0$, $y = 0$. Brauchbare Partikularlösungen von (8) sind Produkte von der Form $\sin \frac{h\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b}$, so daß man als Partikularlösungen w der Gleichung (2a) erhält

$$\left\{ \begin{aligned} w_{hk} &= \sin \frac{h\pi x}{a} \sin \frac{kpy}{b} \sin n_{hk} t \quad \text{und} \\ w_{hk} &= \sin \frac{h\pi x}{a} \sin \frac{h\pi y}{b} \cos n_{hk} t, \end{aligned} \right. \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2 \ldots \\ k = 1, 2 \ldots \end{pmatrix} \tag{9}$$

---

1) Vgl. z. B. F. Pockels, Über die partielle Differentialgleichung $\Delta U + k^2 u = 0$. Leipzig (Teubner) 1901. S. 67 ff. In neuester Zeit ist die Integration von E. Reinstein nach dem Ritzschen Verfahren auch für die elliptische Membran ausgeführt worden (Annalen der Physik (4) 35 (1911), S. 109).

also als allgemeine Lösung die Partialschwingung

$$(10)\quad \begin{cases} w_{hk} = (A_{hk}' \sin n_{hk} t + A_{hk}'' \cos n_{hk} t) \sin \frac{h\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} \\ \quad = A_{hk} \sin (n_{hk} t + \vartheta_{hk}) \sin \frac{h\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} . \end{cases}$$

Die Geschwindigkeit der Teilchen wird

$$(11)\quad \begin{cases} \frac{\partial w_{hk}}{\partial t} = n_{hk}(A_{hk}' \cos n_{hk} t - A_{hk}'' \sin n_{hk} t) \sin \frac{h\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} \\ \quad = n_{hk} A_{hk} \cos (n_{hk} t + \vartheta_{hk}) \sin \frac{h\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} , \end{cases}$$

wobei n_{hk} bestimmt wird durch

$$(12)\quad n_{hk}^2 = c^2 \pi^2 \left(\frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}\right) .$$

Diese letzte Beziehung erhält man leicht als notwendige und hinreichende Bedingung, indem man versuchsweise für $w^{(xy)}$ das Produkt $\sin \frac{h\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b}$ in Gl. (8) einsetzt.

Als allgemeinste Lösung ergibt sich hieraus durch Übereinanderlagerung der Partialschwingungen

$$(13)\quad \begin{cases} w = \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (A_{hk}' \sin n_{hk} t + A_{hk}'' \cos n_{hk} t) \sin \frac{h\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} \\ \quad = \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (A_{hk} \sin (n_{hk} + \vartheta_{hk}) \sin \frac{h\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} \end{cases}$$

und

$$(14)\quad \begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} n_{hk} (A_{hk}' \cos n_{hk} t - A_{hk}'' \sin n_{hk} t) \sin \frac{h\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} \\ \quad = \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} n_{hk} A_{hk} \cos (n_{hk} t + \vartheta_{hk}) \sin \frac{h\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} . \end{cases}$$

Die Lösung (13) ist wirklich die allgemeinste Lösung, denn sie läßt sich jedem beliebigen Anfangszustand anpassen, bei dem Ausbiegung w und Geschwindigkeit $\frac{\partial w}{\partial t} = \dot{w}$ der Membranteilchen beliebig gegebene Werte haben. Setzt man nämlich in (13) und

(14) $t = 0$, so erhält man rechts Reihen, deren Glieder Produkte von zwei Sinusfunktionen sind, die nach ganzzahligen Vielfachen des Argumentes x bzw. y fortschreiten, nämlich

$$(15)\quad \begin{cases} w_0^{(xy)} = \sum_{h=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} A_{hk}'' \sin\frac{h\pi x}{a}\sin\frac{k\pi y}{b} \\ \left(\frac{\partial w^{(xy)}}{\partial t}\right)_0 = \sum_{h=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} n_{hk} A_{hk}' \sin\frac{h\pi x}{a}\sin\frac{k\pi y}{b}. \end{cases}$$

Es ist $w_0^{(xy)}$ geschrieben, um anzudeuten, daß diese Größe nicht mehr von t abhängt, indem t dabei den konstanten Wert 0 hat. Die Koeffizienten A_{hk}' und A_{hk}'' sind bestimmt durch

$$(16)\quad \begin{cases} A_{hk}'' = \frac{4}{ab}\int\limits_{x=0}^{a}\int\limits_{y=0}^{b} w_0^{(xy)} \sin\frac{h\pi x}{a}\sin\frac{k\pi y}{b}\,dx\,dy \\ A_{hk}' = \frac{4}{n_{hk}ab}\int\limits_{x=0}^{a}\int\limits_{y=0}^{b} \left(\frac{\partial w^{(xy)}}{\partial t}\right)_0 \sin\frac{h\pi x}{a}\sin\frac{k\pi y}{b}\,dx\,dy. \end{cases}$$

Für ein konstant gehaltenes y, d. h. für einen unendlich schmalen Streifen der Membran parallel der a-Kante werden beide Reihen (15) Fouriersche Sinusreihen, die in dem Intervall $x = 0$ bis $x = a$ die links stehenden Größen als Funktionen von x darstellen. Man erkennt dies, wenn man Gl. (15) bezüglich der x nicht als Summenformel sondern aufgelöst als Reihe hinschreibt:

$$(15\text{a})\quad \begin{cases} w_0^{(xy)} = \sin\frac{\pi x}{a}\sum_{k=1}^{\infty} A_{1,k}''\sin\frac{k\pi y}{b} \\ \qquad + \sin\frac{2\pi x}{a}\sum_{k=1}^{\infty} A_{2,k}''\sin\frac{k\pi y}{b} \\ \qquad + \sin\frac{3\pi x}{a}\sum_{k=1}^{\infty} A_{3,k}''\sin\frac{k\pi y}{b} + \cdots \\ \qquad + \sin\frac{h\pi x}{a}\sum_{k=1}^{\infty} A_{hk}''\sin\frac{k\pi y}{b} + \cdots, \end{cases}$$

und die analoge Reihe für $\left(\frac{\partial w^{(xy)}}{\partial t}\right)_0$. Diese Reihe hat die Form

$$(17)\quad w_0^{(xy)} = a_1'' \sin\frac{\pi x}{a} + a_2'' \sin\frac{2\pi x}{a} + \cdots + a_h'' \sin\frac{h\pi x}{a} + \cdots$$

wobei die Koeffizienten a_h'', die Summen $\sum$ in (15a), von y abhängen, also bei konstant gehaltenem y selbst konstant sind.

Sie sind durch $w_0^{(xy)}$ eindeutig als Funktionen von y bestimmt, denn sie haben die Werte (vgl. Bd. I, Nr. 10)

$$(18)\qquad a_h'' = \frac{1}{a}\int_{-a}^{+a} w_0^{(xy)} \sin\frac{h\pi x}{a}\, dx = \frac{2}{a}\int_0^a w_0^{(xy)} \sin\frac{h\pi x}{a}\, dx.$$

Die Funktion $w_0^{(xy)}$ ist nur auf der Fläche der Membran d. h. also als Funktion von x nur im Intervall von $x = 0$ bis $x = +a$ gegeben, sie muß aber als ungerade Funktion über $x = 0$ bis $x = -a$ fortgesetzt gedacht werden, damit sie durch eine Fourierreihe dargestellt werden kann, die nur Sinusglieder enthält, wie es zur Erfüllung der Grenzbedingungen durch das Integral der Bewegungsgleichung nötig ist. Daher kommt in (18) als untere Grenze $-a$ hinein. Da aber $w_0^{(xy)} \sin\frac{h\pi x}{}$ als Produkt zweier ungerader Funktionen eine gerade Funktion ist, so kann man die paarweise gleichen Glieder, die zu gleichen Absolutwerten x gehören, zusammenfassen und bekommt dann die zweite Form von (18) mit 0 als unterer Grenze und dem Faktor 2.

Die Reihe auf der rechten Seite von (17) ist also zweifellos eine richtige Darstellung der Funktionen $w_0^{(xy)}$ auf der ganzen Fläche der Membran, d. h. für alle Werte x zwischen 0 und a, alle Werte y zwischen 0 und b, wenn $w_0^{(xy)}$ in diesem Gebiet willkürlich gegeben ist. Aus physikalischen Gründen muß übrigens $w_0^{(xy)}$ eine stetige Funktion sein.

Die nur von y abhängigen Koeffizienten a_h'' (und a_h') können nun im Intervall 0 bis b durch eine einfache nach Vielfachen des Argumentes $\frac{\pi y}{b}$ fortschreitende Fouriersche Sinusreihe dargestellt werden, da die Größen a_h'' an den Grenzen $y = 0$ und $y = b$ offenbar Null sind — weil $w_0^{(xy)}$ daselbst Null ist — und daher über $y = 0$ hinaus bis $y = -b$ als ungerade Funktion fortgesetzt gedacht werden können. Dabei ergibt sich dann für diese Koeffizienten die Darstellung

(19) $a_h'' = A_{h,1}'' \sin\frac{\pi y}{b} + A_{h,2}'' \sin\frac{2\pi y}{b} + \cdots + A_{h,k} \sin\frac{k\pi y}{b} + \cdots,$

wobei die Koeffizienten $A_{h,k}''$ dieser neuen Reihe die Werte haben

$$(20) \qquad A_{hk}'' = \frac{1}{b}\int\limits_{y=-b}^{+b} a_h'' \sin\frac{k\pi y}{b}\,dy = \frac{2}{b}\int\limits_{y=0}^{b} a_h'' \sin\frac{k\pi y}{b}\,dy,$$

was durch Einsetzen des Wertes von a_h'' aus (18) sofort die Ausdrücke von Gl. (16) ergibt, auch den für A_{hk}', da die Reihenentwicklung für die willkürlich gegebene Anfangsgeschwindigkeit $\left(\frac{\partial w^{(xy)}}{\partial t}\right)_0$ ganz analog zu behandeln ist. Derartige Reihen mit Produkten von zwei Funktionen, deren jede nur von einer Variabeln abhängt, erhält man zur Darstellung eines willkürlichen Anfangszustandes auch bei andrer Form der Randkurve, z. B. bei Kreisform (vgl. Nr. 59 ff.); doch treten dabei statt der Kreisfunktionen Sinus bzw. Kosinus andre Funktionen (Besselsche usw.) auf.

Bei räumlichen Problemen (z. B. Schwingungen von eingeschlossenen Gasmassen usw.) ergeben sich Reihen mit Produkten aus drei Faktoren.

Die zyklische oder Kreisfrequenz einer Partialschwingung ist durch n_{hk} mittels Gl. (12) bestimmt; die Frequenz in der Zeiteinheit (1 Sekunde) ist also

$$(21) \qquad N_{hk} = \frac{n_{hk}}{2\pi} = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}}. \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2 \ldots \\ k = 1, 2 \ldots \end{pmatrix}$$

Durch Einsetzen aller möglichen Kombinationen von ganzzahligen Werten h und k erhält man alle überhaupt möglichen Frequenzen und die zugehörigen Schwingungstypen der Membran.

Sind a und b inkommensurabel, so gibt Vertauschung der Werte von h und k (z. B. einmal $h = 2$, $k = 3$, das andremal $h = 3$, $k = 2$) immer verschiedene Frequenzen, d. h. zu jeder Frequenz gehört nur ein einziges Wertepaar h, k und ein einziger Schwingungstyp der Membran. Stehen aber a und b in rationalen Verhältnissen zueinander, so kommen Fälle vor, bei denen eine Vertauschung von h und k die gleiche Frequenz liefert, während der Typus der Schwingungsform ein andrer wird. Von Belang ist dies aber nur, wenn das rationale Verhältnis $a:b$ durch kleine ganze Zahlen ausgedrückt wird. Besonderes Interesse bietet die quadratische Membran dar, wo $a:b = 1:1$ ist.

58. Quadratische Membran. Frequenzen und Schwingungsfiguren der Partialschwingungen. Wir teilen die Schwingungen in Reihen ein, indem wir in jeder Reihe h konstant setzen und k alle möglichen ganzzahligen Werte von 1 bis ∞ beilegen. Dabei brauchen die Schwingungen mit gleichen Werten der Ordnungszahlen h und k, aber in anderer Anordnung (z. B. $h = 2$, $k = 3$ und $h = 3$, $k = 2$), nur einmal behandelt zu werden, weil sie dieselbe Frequenz haben und die eine Schwingungsfigur einfach durch Drehung der Membran um 90^0 aus der anderen hervorgeht. Wir fassen diese Fälle deshalb gleich zusammen. Durch Übereinanderlagerung dieser beiden isochronen, aber in der Form verschiedenen Typen erhält man eine unendliche Menge neuer bestimmter Schwingungstypen, die je nach dem Amplitudenverhältnis und der Phasendifferenz der Komponenten verschieden ausfallen.

Für alle Schwingungen ist die Frequenz in der Sekunde

$$N_{hk} = \frac{c}{2a}\sqrt{h^2 + k^2}. \tag{22}$$

1. Reihe: $h = 1$; $k = 1, 2, 3 \ldots$

I) Grundschwingung $h = k = 1$.

Die Partikularlösungen (9) in Nr. 57 geben die Schwingungsform der Membran (Lage der Knotenlinien, Größe der Ausweichung usw.), wie es sein muß, übereinstimmend, wenn man den Zeitfaktor durch geeignete Wahl der Zeit t gleich groß macht, z. B. gleich Eins, indem $t = \frac{\pi}{2n_{hk}}$ bzw. $t = 0$ gesetzt wird. Die Lage der Knotenlinien (Schwingungsfigur) ist natürlich von dem jeweiligen Werte des Zeitfaktors ganz unabhängig, sie wird allein durch die Normalfunktion $w_{hk}^{(xy)}$ bestimmt, die hier für $a = b$ übergeht in die Form

$$w_{hk}^{(xy)} = \sin\frac{h\pi x}{a}\sin\frac{k\pi y}{a}. \tag{23}$$

Für $h = k = 1$ ergibt dies die Normalfunktion

$$w_{1,1}^{(xy)} = \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a}, \tag{24}$$

d. h. w wird nur an den Rändern $x = a$, $y = a$ dauernd Null, im Innern sind keine Knotenlinien oder Punkte vorhanden. Die maximale Ausbiegung liegt im Mittelpunkt des Quadrates. Die Ausbiegung hat an allen Punkten dasselbe Vorzeichen. Die Fre-

quenz ist

$$N_{11} = \frac{c\sqrt{2}}{2a}. \tag{25}$$

Oberschwingungen.

IIa) $h = 1,\ k = 2$ und **IIb)** $h = 2,\ k = 1$.

$$\text{Frequenz } N_{12} = N_{21} = \frac{c\sqrt{5}}{2a} = 1{,}581\, N_{11}. \tag{26}$$

Die Normalfunktionen sind

$$\text{IIa)} \quad w_{12}^{(xy)} = \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{a}, \quad \text{und} \tag{27}$$

$$\text{IIb)} \quad w_{21}^{(xy)} = \sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a}.$$

Typus IIa) hat außer den Randlinien die randparallele Mittellinie $y = \frac{a}{2}$, Typus IIb) die Mittellinie $x = \frac{a}{2}$ als Knotenlinie. In Figur 38 sind dies die Fälle $B = 0$ (IIa) und $B = \pm\infty$ (IIb). Durch Übereinanderlagerung beider Schwingungstypen entsteht der allgemeine Typus II), nämlich

$$w = A_{12}\sin(nt + \vartheta_{12})\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{a} + A_{21}\sin(nt + \vartheta_{21})\sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a} \tag{28}$$

oder umgeformt

$$w = 2\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a}\left[A_{12}\sin(nt + \vartheta_{12})\cos\frac{\pi y}{a} + A_{21}\sin(nt + \vartheta_{21})\cos\frac{\pi x}{a}\right]. \tag{28a}$$

Also ist hier $w = 0$, wenn einer der drei von x und y abhängigen Faktoren in (28a) Null wird. Die beiden ersten geben nur die Randlinien als Knotenlinien. Der letzte Faktor in der eckigen Klammer ist im allgemeinen noch von t abhängig. Die durch ihn bestimmte Knotenlinie liegt daher nicht fest, sondern wandert im allgemeinen hin und her. Nur in besonderen Fällen ergibt sich eine feste Lage. Das sind erstens die beiden Fälle $A_{21} = 0$ und $A_{12} = 0$, welche nichts anderes als die soeben behandelten Typen IIa) und IIb) sind, und zweitens die Fälle, in denen sich noch der Zeitfaktor aus dem Klammerausdruck abspalten läßt. Das geschieht, wenn $\vartheta_{21} = \vartheta_{12}$ oder $\vartheta_{21} = \vartheta_{12} + \pi$ ist, d. h. wenn beide

Komponenten gleiche oder entgegengesetzte Phase haben. Im Fall gleicher Phasen ist die Gleichung der Knotenlinien

$$A_{12} \cos \frac{\pi y}{a} + A_{21} \cos \frac{\pi x}{a} = 0, \tag{29}$$

bei entgegengesetzten Phasen ist sie

$$A_{12} \cos \frac{\pi y}{a} - A_{21} \cos \frac{\pi x}{a} = 0. \tag{30}$$

Diese beiden transzendenten Gleichungen lassen sich in die eine zusammenfassen

$$\cos \frac{\pi y}{a} + B \cos \frac{\pi x}{a} = 0, \qquad \left(B = \frac{A_{21}}{A_{12}}\right) \tag{31}$$

wobei B alle Werte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ annehmen kann; positive Werte B entsprechen gleichen Phasen [Gleichung (29)], negative Werte entgegengesetzten Phasen [Gleichung (30)] der Komponenten. Nur diejenigen Wurzeln x und y der Gleichung (31) kommen hier in Betracht, welche zwischen 0 und $+a$ liegen. Für $B = -1$ d. h. $A_{12} + A_{21} = 0$ und $B = +1$ d. h. $A_{12} - A_{21} = 0$ ergeben sich daher als Knotenlinien die Diagonalen des Quadrates $y = x$ und $y = a - x$. Für $B = 0$ und $B = \infty$ erhält man wieder die Randparallelen $y = \frac{a}{2}$ und $x = \frac{a}{2}$. Bei anderen Werten erhält man Kurven, die sich zwischen diese extremen Fälle einordnen und die sämtlich durch den Mittelpunkt des Quadrates hindurchgehen, da nach (31) für $x = \frac{a}{2}$ immer auch $y = \frac{a}{2}$ sein muß. Die Figuren 38 zeigen die Lage der Knotenlinien in den angegebenen Fällen.

In dem allgemeinen Falle beliebiger Phasendifferenz nehmen die Knotenlinien offenbar nacheinander verschiedene der hier skizzierten Formen und gewisse zwischen ihnen gelegene Übergangsformen an, da alsdann der Wert von B, der gleich $\frac{A_{21} \sin (nt + \vartheta_{21})}{A_{12} \sin (nt + \vartheta_{12})}$ zu setzen ist, mit der Zeit variiert.

IIIa) $h = 1,\ k = 3$ und **IIIb)** $h = 3,\ k = 1$

$$\text{Frequenz } N_{13} = N_{31} = \frac{c\sqrt{10}}{2a} = 2{,}236\, N_{11}. \tag{32}$$

Normalfunktionen

$$w_{13}^{(xy)} = \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{a} \quad \text{und} \quad w_{31}^{(xy)} = \sin \frac{3\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}. \tag{33}$$

Entgegengesetzte Phasen

$B = -\infty$ $A_{11} = 0$; $B = -2$ $A_{21} = -2A_{12}$; $B = -1$ $A_{21} = -A_{12}$; $B = -\frac{1}{2}$ $A_{21} = -\frac{1}{2}A_{12}$; $B = 0$ $A_{21} = 0$

$B = \frac{1}{2}$ $A_{21} = \frac{1}{2}A_{12}$; $B = 1$ $A_{21} = A_{12}$; $B = 2$ $A_{21} = 2A_{12}$; $B = \infty$ $A_{21} = \infty$

Gleiche Phasen.

Fig. 38. Verschiedene Gestalten der Knotenlinie bei der ersten Oberschwingung einer quadratischen Membran.

Die Knotenlinien dieser beiden Typen sind die Randparallelen $y = \frac{a}{3}$ und $y = \frac{2a}{3}$ bei IIIa), $x = \frac{a}{3}$ und $x = \frac{2a}{3}$ bei IIIb). In Figur 39 sind dies die Fälle $B = 0$ (IIIa) und $B = \pm\infty$ (IIIb).

Der allgemeine aus beiden zusammengesetzte Typ ist

$$(34) \qquad w = A_{13} \sin(nt + \vartheta_{13}) \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{3\pi y}{a} + A_{31} \sin(nt + \vartheta_{31}) \sin\frac{3\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{a}$$

oder umgeformt

$$(34\,\mathrm{a}) \qquad w = \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{a} \left[A_{13} \sin(nt + \vartheta_{13}) \left(4\cos^2\frac{\pi y}{a} - 1\right) + A_{31} \sin(nt + \vartheta_{31}) \left(4\cos^2\frac{\pi x}{a} - 1\right)\right].$$

Aus dem Klammerausdruck läßt sich auch wieder ein Zeitfaktor $\sin(nt + \vartheta_{13})$ abspalten, wenn die Phasen der Komponenten gleich ($\vartheta_{31} = \vartheta_{13}$) oder entgegengesetzt ($\vartheta_{31} = \vartheta_{13} + \pi$) sind. Der letzte Fall bedeutet wieder, daß A_{31} entgegengesetztes Vorzeichen erhält wie bei gleichen Phasen und wird mit umfaßt, wenn man den Quotienten $B = A_{31} : A_{13}$ alle möglichen Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen läßt. Bei gleichen (bezw. entgegengesetzten)

Phasen der beiden Komponenten ergeben sich so die festen Knotenlinien, welche durch die Gleichung bestimmt sind

$$A_{13}\left(4\cos^2\frac{\pi y}{a}-1\right)+A_{31}\left(4\cos^2\frac{\pi x}{a}-1\right)=0 \tag{35}$$

oder

$$4\cos^2\frac{\pi y}{a}-1+B\left(4\cos^2\frac{\pi x}{a}-1\right)=0 \qquad \left(B=\frac{A_{31}}{A_{13}}\right). \tag{35a}$$

Für $B=0$ und $B=\pm\infty$, d. h. wenn entweder $A_{31}=0$ oder $A_{13}=0$ ist, erhält man die Einzelschwingungen mit den Randparallelen $y=\frac{a}{3}$ und $\frac{2a}{3}$ bezw. $x=\frac{a}{3}$ und $\frac{2a}{3}$ [Fall IIIa) und IIIb)] als Knotenlinien. Für $B=-1$, d. h. wenn $A_{31}=-A_{13}$ ist (entgegengesetzte Phasen), geht (35) über in

$$\cos^2\frac{\pi y}{a}=\cos^2\frac{\pi x}{a},\quad \text{d. h.}\quad \cos\frac{\pi y}{a}=\pm\cos\frac{\pi x}{a} \tag{36}$$

mit der Lösung $y=x$ und $y=a-x$.

Knotenlinien sind hier also die Diagonalen des Quadrats. Für $B=+1$ (gleiche Phasen) schließlich erhält man als Knotenlinie die kreisähnliche Kurve mit der Gleichung

$$\cos^2\frac{\pi x}{a}+\cos^2\frac{\pi y}{a}=\frac{1}{2}. \tag{37}$$

Für alle anderen Werte von B erhält man kompliziertere transzendente Kurven, deren Formen zwischen denen der genannten Systeme liegen (Fig. 39).

Sind die Phasen der beiden Komponenten nicht gleich oder entgegengesetzt (allgemeiner ausgedrückt nicht genau um ein Vielfaches von π verschieden), so ergeben sich auch wieder hin- und herwandernde Knotenlinien, deren Gestalt in jedem Augenblick mit einer der eben behandelten festen Knotenlinien übereinstimmt. Wie diese aber auch gestaltet sein mögen, sie müssen unbedingt durch die Schnittpunkte der randparallelen Knotenlinien der beiden Einzelschwingungen IIIa) und IIIb) hindurchgehen. Das folgt sofort aus Gl. (35), indem daselbst für $x=\frac{a}{3}$ oder $x=\frac{2a}{3}$ auch y einen dieser Werte haben muß, falls nicht gerade A_{13} oder $A_{31}=0$ ist. Dieser Satz gilt entsprechend für alle anderen Schwingungen mit beliebigen Wertepaaren h und k. Die betreffenden Punkte sind die „Pole" der Schwingungsfigur.

Entgegengesetzte Phasen.

$B=-\infty$ $A_{12}=0$; $B=-2$ $A_{21}=-2A_{12}$; $B=-1$ $A_{21}=-A_{12}$; $B=-\frac{1}{2}$ $A_{21}=-\frac{1}{2}A_{12}$; $B=0$ $A_{21}=0$

$B=\frac{1}{2}$ $A_{21}=\frac{1}{2}A_{12}$; $B=+1$ $A_{21}=A_{12}$; $B=2$ $A_{21}=2A_{12}$; $B=\infty$ $A_{21}=\infty$

Gleiche Phasen.

Fig. 39. Verschiedene Gestalten der Knotenlinien bei der zweiten Oberschwingung einer quadratischen Membran.

IVa) $h=1,\ k=4$ und **IVb)** $h=4,\ k=1$.

$$\text{(38)}\qquad \text{Frequenz } N_{14}=N_{41}=\frac{c\sqrt{17}}{2a}=2{,}93\,N_{11}.$$

Die Einzelkomponenten haben die randparallelen Knotenlinien $y=\frac{a}{4},\ y=\frac{a}{2},\ y=\frac{3a}{4}$ bei IVa) und $x=\frac{a}{4},\ x=\frac{a}{2},\ x=\frac{3a}{4}$ bei IVb). Durch Übereinanderlagerung ergeben sich wieder kompliziertere Kurven. Die Reihe ist leicht fortzusetzen.

2. Reihe $h=2;\ k=1,2,3\ldots$

Von dieser ist das erste Glied ($h=2,\ k=1$) schon unter IIb) der ersten Reihe behandelt. Neu ist dagegen der Fall

II′) $h=2,\ k=2$

als Analogon der Grundschwingung $h=1,\ k=1$.

$$\text{(39)}\qquad \text{Frequenz } N_{22}=\frac{2c\sqrt{2}}{2a}=2N_{11}.$$

Wie bei der Grundschwingung ist hier nur ein Schwingungstyp vorhanden mit der Normalfunktion

$$\text{(40)}\qquad w_{22}^{(xy)}=\sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{a}.$$

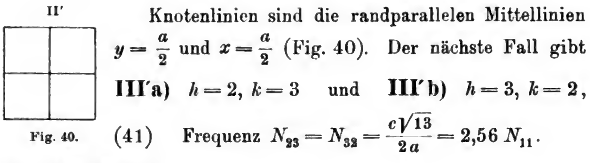


Fig. 40.

Knotenlinien sind die randparallelen Mittellinien $y = \frac{a}{2}$ und $x = \frac{a}{2}$ (Fig. 40). Der nächste Fall gibt

III′a) $h = 2,\ k = 3$ und **III′b)** $h = 3,\ k = 2$,

$$\text{(41)} \qquad \text{Frequenz } N_{23} = N_{32} = \frac{c\sqrt{13}}{2a} = 2{,}56\, N_{11}.$$

Normalfunktionen

$$\text{(42)} \qquad w_{23}^{(xy)} = \sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{3\pi y}{a} \quad \text{und} \quad w_{32}^{(xy)} = \sin\frac{3\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{a},$$

III′a III′b

Fig. 41.

mit den randparallelen Knotenlinien (Fig. 41)

$$\text{(43)} \qquad \begin{aligned} y &= \frac{a}{3},\ y = \frac{2a}{3} \text{ und } x = \frac{a}{2} \text{ bei III}'\text{a}), \\ x &= \frac{a}{3},\ x = \frac{2a}{3} \text{ und } y = \frac{a}{2} \text{ bei III}'\text{b}). \end{aligned}$$

Die Übereinanderlagerung gibt hier eine noch größere Mannigfaltigkeit der Formen und, wenn die Phasen nicht gleich oder entgegengesetzt sind, auch wieder wandernde Knotenlinien.

Es ist leicht zu übersehen, wie diese und die folgenden Reihen weiter zu behandeln sind. Jedesmal wenn h und k einander gleich sind, ergibt sich nur einziger Schwingungstyp, sonst stets zwei mit gleicher Frequenz, die sich übereinanderlagern können.

Tabelle 13.

Relative Schwingungszahlen aller Töne der quadratischen Membran in den drei ersten Oktaven.

1,00	2,00	3,00	4,00	5,00	6,00	7,00
1,58	2,24	3,16	4,12	5,10	6,04	7,07
	2,55	3,53	4,31	5,14	6,08	7,21
	2,92	3,61	4,47	5,39	6,33	7,28
		3,81	4,53	5,52	6,40	7,38
			4,74	5,70	6,52	7,52
				5,83	6,67	7,62
					6,71	7,65
					6,97	7,91

Die Frequenzen der Einzeltypen ($h=k$) bilden die harmonische Partialtonreihe

$$(44) \qquad \frac{c\sqrt{2}}{2a} : \frac{2c\sqrt{2}}{2a} : \frac{3c\sqrt{2}}{2a} \cdots = 1 : 2 : 3 \cdots,$$

alle anderen sind unharmonisch zum Grundton. In Tabelle 13 sind die Frequenzen relativ zum Grundton N_{11} verzeichnet.

59. Kreisförmige Membran und verwandte Formen. Herleitung und Integration der Differentialgleichung. Statt der rechtwinkligen Kartesischen Koordinaten x, y führen wir ebene Polarkoordinaten r, φ mittels der bekannten Beziehungen ein

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Die Bewegungsgleichung (2a) Nr. 56 läßt sich nach bekannten mathematischen Transformationsformeln umformen und in den neuen Koordinaten ausdrücken[1]) als

$$(45) \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right) \qquad \left(c^2 = \frac{p}{\varrho'}\right).$$

Ohne Hilfe dieser Transformationsformeln kann man die Gleichung wieder direkt aufstellen, indem man die auf ein Flächenelement der Membran wirkenden Kräfte bestimmt. Das von zwei konzentrischen Kreisen r und $r+dr$, sowie den beiden Radien φ und $\varphi + d\varphi$ ausgeschnittene Flächenelement $ABCD$ hat die Kanten (vgl. Fig. 42) $AB = dr$, $CD = dr$, $AC = r\,d\varphi$, $BC = (r+dr)\,d\varphi$ und bis auf verschwindend kleine Größen höherer Ordnung den Inhalt $df = r\,d\varphi\,dr$. Die infolge der Membranspannung p auf die Kanten in der Membranebene wirkenden Kräfte sind

Fig. 42.

$$-p\,dr, \quad +p\,dr, \quad -p\,r\,d\varphi, \quad +p(r+dr)\,d\varphi;$$

ihre Komponenten in der z-Richtung ergeben sich daraus durch Multiplikation mit dem betreffenden Richtungskosinus der Membran gegen die z-Achse in folgender der Fig. 42 entsprechenden Reihenfolge:

1) Vgl. z. B. H. Weber, Partielle Differentialgleichungen, Bd. I § 43 und 44.

untere Kante dr $\qquad -p\,dr\left(\frac{\partial w}{\partial(r\varphi)}\right)_{\varphi}$

obere Kante dr $\qquad +p\,dr\left(\frac{\partial w}{\partial(r\varphi)}\right)_{\varphi+d\varphi}$

$$=p\,dr\left(\frac{\partial w}{\partial(r\varphi)}\right)_{\varphi}+p\,dr\frac{\partial^2 w}{\partial(r\varphi)^2}d(r\varphi)$$

innere Kante $r\,d\varphi$ $\qquad -p\,r\,d\varphi\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_r$

äußere Kante $(r+dr)\,d\varphi$ $\qquad +p(r+dr)\,d\varphi\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_{r+dr}$

$$=p(r+dr)\,d\varphi\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_r+p(r+dr)\,d\varphi\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}dr.$$

Der Index φ, $\varphi+d\varphi$ usw. bedeutet, daß die betreffende Größe für diesen Wert der Koordinate zu bilden ist; für das Längenelement $r\,d\varphi$ ist $\partial(r\varphi)$ geschrieben, was zulässig ist, weil r hierbei konstant bleiben muß. Durch Summierung erhält man wieder die gesamte auf das Element $df=r\,d\varphi\,dr$ wirkende z-Komponente, d. h. die rücktreibende Kraft

$$\mathfrak{K}_z=p\,df\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}\right) \tag{46}$$

mit Vernachlässigung unendlich kleiner Glieder höherer Ordnung. Setzt man andrerseits diese Kraft gleich dem Produkt aus Masse $\varrho' df$ und Beschleunigung $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ des Membranelementes, so erhält man sofort die Gleichung (45).

Integriert wird diese Gleichung auch wieder durch Zerspaltung der Variablen w in das Produkt

$$w=w^{(t)}w^{(r\varphi)}, \tag{47}$$

wo $w^{(t)}$ nur von t, $w^{(r\varphi)}$ nur von r und φ abhängt; $w^{(t)}$ ist natürlich wieder die einfach periodische Zeitfunktion

$$w^{(t)}=\begin{cases}\sin nt\\ \cos nt\end{cases} \quad \text{bzw.} \quad w^{(t)}=\sin(nt+\vartheta). \tag{48}$$

Für die Normalfunktion $w^{(r\varphi)}$ ergibt sich die Gleichung

$$\frac{\partial^2 w^{(r\varphi)}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w^{(r\varphi)}}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w^{(r\varphi)}}{\partial\varphi^2}+\varkappa^2 w^{(r\varphi)}=0, \tag{49}$$

$$\varkappa=\frac{n}{c} \qquad (n=\text{zyklische Schwingungsfrequenz}). \tag{50}$$

Diese Gleichung läßt sich weiter zerspalten in zwei gewöhnliche lineare Differentialgleichungen durch den Ansatz

$$w^{(r\varphi)} = w^{(r)} w^{(\varphi)}. \tag{51}$$

Man erhält

$$\frac{d^2 w^{(\varphi)}}{d\varphi^2} = -p^2 w^{(\varphi)}, \tag{52}$$

$$r^2 \frac{d^2 w^{(r)}}{dr^2} + r \frac{d w^{(r)}}{dr} + (\varkappa^2 r^2 - p^2) w^{(r)} = 0, \tag{53}$$

wo p eine neue noch unbestimmte Konstante ist. Gleichung (52) liefert die Lösung

$$w^{(\varphi)} = \begin{cases} \sin p\varphi \\ \cos p\varphi \end{cases} \quad \text{oder auch} \quad w^{(\varphi)} = \sin(p\varphi + \varphi_0); \tag{54}$$

sie bedeutet eine, wie es ja auch sein muß, periodische Verteilung der Schwingungsbewegung längs jedes Kreises um den Mittelpunkt der Membran. Gleichung (53) läßt sich schreiben

$$\frac{d^2 w^{(r)}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d w^{(r)}}{dr} + \left(\varkappa^2 - \frac{p^2}{r^2}\right) w^{(r)} = 0, \tag{53a}$$

und wird durch die Substitution

$$\varkappa r = \varrho \tag{55}$$

umgeformt in die Differentialgleichung der Besselschen und Neumannschen Zylinderfunktionen p^{ter} Ordnung

$$\frac{d^2 w^{(r)}}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{d w^{(r)}}{d\varrho} + \left(1 - \frac{p^2}{\varrho^2}\right) w^{(r)} = 0. \tag{53b}$$

Partikularlösungen sind die Besselschen und Neumannschen Zylinderfunktionen p^{ter} Ordnung[1])

$$w^{(r)} = J_p(\varrho) = J_p(\varkappa r) \quad \text{und} \quad w^{(r)} = N_p(\varrho) = N_p(\varkappa r), \tag{56}$$

auch Besselsche Funktionen 1. und 2. Art genannt. Auch irgendwelche linearen Verbindungen von J_p und N_p können als Partikularintegrale genommen werden. Die Besselschen Funktionen $J_p(\varrho)$ sind durch Potenzreihen mit steigenden Potenzen definiert, die Neumannschen Funktionen $N_p(\varrho)$ ebenfalls durch — etwas kompliziertere — Potenzreihen, die auch negative Po-

1) Nach der Bezeichnungsweise in Jahnke-Emde, Funktionentafeln usw. (Leipzig 1909) M. P. S. Nr. 5, S. 93.

tenzen enthalten[1]). Für **ganzzahlige** Werte des Parameters (Ordnungszahl) p sind die Reihen[2])

$$(57)\qquad J_p(\varrho)=\left(\frac{\varrho}{2}\right)^p\left\{\frac{1}{p!}-\frac{\left(\frac{\varrho}{2}\right)^2}{1!\,(p+1)!}+\frac{\left(\frac{\varrho}{2}\right)^4}{2!\,(p+2)!}-\cdots\right\},$$

$$(58)\qquad N_p(\varrho)=\frac{2}{\pi}J_p(\varrho)\log\operatorname{nat}\varrho-\frac{2}{\pi}J_p(\varrho)\left[\log\operatorname{nat}2-C\right]$$

$$-\frac{2}{\pi}\left\{2^{p-1}(p-1)!\,\varrho^{-p}+\frac{2^{p-3}(p-2)!}{1!}\varrho^{-p+2}\right.$$

$$\left.+\frac{2^{p-5}(p-3)!}{2!}\varrho^{-p+4}+\cdots+\frac{\varrho^{p-2}}{2^{p-1}(p-1)!}\right\}$$

$$-\frac{2}{\pi}\frac{\varrho^p}{2^{p+1}p!}\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\frac{1}{\nu}+\frac{2}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}k_{p\nu}\,\varrho^{p+2\nu}}{2^{p+2\nu}\nu!\,(p+\nu)!}.$$

Hierbei ist $C=0{,}57722$ die Eulersche (oder Mascheronische) Konstante, $(p+\nu)!=1.2.3\ldots(p+\nu)$ und

$$k_{p\nu}=\sum_{\lambda=1}^{\nu}\left(\frac{1}{2\lambda}+\frac{1}{2(p+\lambda)}\right)+\sum_{\lambda=1}^{p}\frac{1}{2\lambda}.$$

Bei der Formel (58) ist zu beachten, daß $0!=1$, die Fakultät einer negativen Zahl aber Null ist.

$J_p(\varrho)$ und $N_p(\varrho)$ sind oszillierende Funktionen, die um den Wert Null herumschwanken und mit wachsendem ϱ sich immer mehr der Null nähern. Für $\varrho=0$ werden die Neumannschen Funktionen $N_p(\varrho)$ negativ unendlich, die Besselschen Funktionen $J_p(\varrho)$ dagegen bleiben endlich, und zwar wird $\lim_{\varrho=0} J_0(\varrho)=1$, alle anderen, $J_1(\varrho)$, $J_2(\varrho)$ usw. werden für $\varrho=0$ selbst Null. Der Verlauf für die ersten Ordnungen $p=0, 1, 2$ ist in den Figg. 43 und 44 dargestellt. Tafeln der Zahlenwerte sind in den Funktionentafeln von Jahnke-Emde enthalten.

1) Die Neumannsche Zylinderfunktion kommt nur bei ganzzahligem Parameter p in Betracht. Sonst wird sie durch die Besselsche Funktion $J_{-p}(\varrho)$ mit negativem Parameter ersetzt.

2) Jahnke-Emde, Funktionentafeln usw., S. 93. Bei nicht ganzzahligem Parameter p tritt statt der Fakultäten (z. B. $(p+\nu)!$) die Gaußsche Π-Funktion $\Pi(p+\nu)$ auf. (Jahnke-Emde, S. 26.)

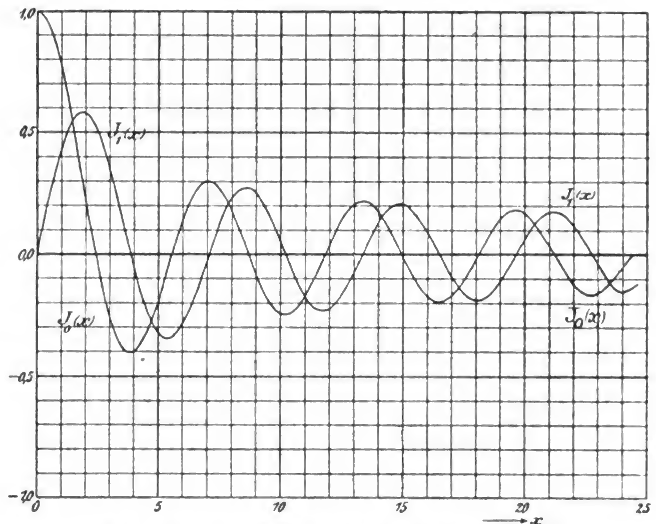


Fig. 43. Besselsche Zylinderfunktionen der Ordnung Null und Eins.

Das allgemeine Integral von (53b) ist

$$Z_p(\varrho) = C_1 J_p(\varrho) + C_2 N_p(\varrho), \tag{59}$$

wobei C_1 und C_2 willkürliche, durch die Grenzbedingungen des Problems zu bestimmende Konstanten sind und $Z_p(\varrho)$ allgemein die Zylinderfunktion bezeichnet. Für eine kreisringförmige Membran muß diese allgemeine Lösung benutzt werden, für eine Vollkreismembran reduziert sich $Z_p(\varrho)$ auf die Besselsche Funktion $J_p(\varrho)$, indem $C_2 = 0$ zu setzen ist, weil die Verrückung der Membranteilchen auch im Mittelpunkt $\varrho = 0$ endlich bleiben muß. Der akustisch wichtigere Fall ist die Vollkreismembran.

In der allgemeinsten Form ist mit Benutzung von Gleichung (47), (48), (51), (54) und (56) bzw. (59) die Verrückung

$$w = A\,Z_p(\varkappa r) \sin(p\varphi + \varphi_0) \sin(nt + \vartheta), \tag{60}$$

wobei statt ϱ wieder $\varkappa r$ geschrieben ist. Diese Lösung stellt eine

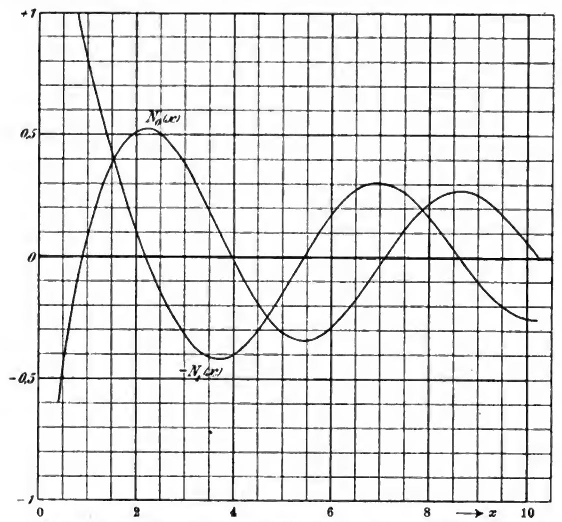


Fig. 44. Neumannsche Zylinderfunktionen der Ordnung Null und Eins.

große Menge diskreter Werte w dar, die sich durch die Werte der Parameter p und $\varkappa$ unterscheiden. Diese Parameter können gewisse durch die Grenzbedingungen (Randbedingungen) des Problems festgelegte Werte annehmen. Bei einem Vollkreis und einem Ring, bei denen nur die kreisförmige Begrenzung, nicht auch noch ein oder mehrere Radien fest eingespannt sind, kann p die Werte 0, 1, 2 ... haben; wird auch noch ein Radius festgehalten, so tritt dafür die Reihe $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$, 2, $\frac{5}{2}$ ... ein; bei zwei festgehaltenen Radien, d. h. bei einem Kreissektor oder Kreisringsektor ergibt sich eine Reihe, deren Zahlwerte von dem Sektorwinkel abhängen. Durch den Parameter p und die Radien a und b der begrenzenden Kreise bzw. beim Vollkreis durch den Radius a des begrenzenden Kreises ist $\varkappa$, und damit nach (50) und (45) die Schwingungsfrequenz n bestimmt.

Die Konstante φ_0 bestimmt die Lage des Radius, von dem aus der Winkel φ gezählt wird; wenn nur die einzelnen Partialschwingungen betrachtet werden und nicht eine durch Übereinanderlagerung mehrerer von ihnen entstehende Bewegung, so ist

der Wert von φ_0 ebenso wie derjenige der Phasenkonstante ϑ gleichgültig und kann etwa $= \frac{\pi}{2}$ oder $= 0$ gewählt werden. Nur für $p = 0$ muß φ_0 von Null verschieden, sonst aber beliebig angenommen werden. Die Konstanten von (60) müssen so bestimmt werden, daß die Grenzbedingung „$w = 0$ an allen festgehaltenen Randlinien" erfüllt wird.

60. Vollkreismembran. Schwingungsfiguren und Frequenzen der Eigenschwingungen. Die Zylinderfunktion $Z_p(\varkappa r)$ reduziert sich auf die Besselsche Funktion $J_p(\varkappa r)$, also wird

(61) $$w = A J_p(\varkappa r) \sin(p\varphi + \varphi_0) \sin(nt + \vartheta).$$

1. $\boldsymbol{p = 0}$. Die Bewegung ist symmetrisch um den Mittelpunkt

(62) $$w = A J_0(\varkappa r) \sin(nt + \vartheta);$$

alle Punkte der Membran sind stets in gleicher Phase, da $\sin \varphi_0$ auf der ganzen Membran konstant ist; es ist hier mit der Amplitudenkonstante A zusammengefaßt worden. Die Grenzbedingung erfordert, daß für $r = a$ $w = 0$ sein soll. Also muß

(63) $$J_0(\varkappa a) = 0$$

sein. Die Wurzeln der transzendenten Gleichung $J_0(\varrho) = 0$ sind[1])

(64) $$\varrho_0^{(1)} = 2{,}4048; \quad \varrho_0^{(2)} = 5{,}5201; \quad \varrho_0^{(3)} = 8{,}6537;$$
$$\varrho_0^{(4)} = 11{,}7915 \text{ usw.}$$

Die Differenz dieser Zahlen nähert sich mit wachsender Ordnungszahl der Wurzeln dem Werte π.

Die zulässigen Werte von $\varkappa$ sind hier also

(65) $$\varkappa_0^{(1)} = \frac{2{,}4048}{a}; \quad \varkappa_0^{(2)} = \frac{5{,}5201}{a}; \quad \varkappa_0^{(3)} = \frac{8{,}6537}{a} \text{ usw.}$$

und die Frequenzen der Schwingungen in der Zeiteinheit (1 Sekunde) $N = \frac{n}{2\pi}$ werden nach Gleichung (50)

(66) $$N_0^{(1)} = \frac{2{,}4048\,c}{2\pi a}; \quad N_0^{(2)} = \frac{5{,}5201\,c}{2\pi a}; \quad N_0^{(3)} = \frac{8{,}6537\,c}{2\pi a} \text{ usw.}$$

Jedem der Werte $\varkappa$ und der zugehörigen Frequenz N entspricht ein bestimmtes System von konzentrischen Kreisen als Knoten-

1) Vgl. Jahnke-Emde, Funktionentafeln S. 122.

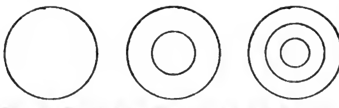


Fig. 45. Kreisförmige Knotenlinien der drei niedersten Schwingungen einer Kreismembran ohne Knotendurchmesser.

linien, die mit der kreisförmigen Begrenzungslinie der Membran konzentrisch sind. Die erste Wurzel ergibt keine (innere) Knotenlinie, die zweite gibt eine, die dritte zwei Knotenlinien außer der Randlinie usw. Die Figg. 45 zeigen den Schwingungstyp. Geht man vom Mittelpunkt nach außen, so wird jedesmal, wenn das Produkt $\varkappa r$ gleich einem der Werte ϱ von (64) wird, die Verrückung dauernd $=0$, d. h. man erhält eine Knotenlinie. Deren Radius ist gegeben durch

$$r=\frac{\varrho_0^{(\sigma)}}{\varkappa_0^{(s)}}=\frac{\varrho_0^{(\sigma)}}{\varrho_0^{(s)}}\,a, \tag{67}$$

wo s und σ zwei beliebige (ganze) Ordnungszahlen sind und zwar $\sigma \leqq s$. Es gehören immer diejenigen Knotenlinien zu einem System, die man aus (67) erhält, indem man s konstant setzt und σ nacheinander die Werte $1, 2 \ldots s$ annehmen läßt. Jedes dieser Systeme enthält $s-1$ (innere) Knotenlinien und dazu noch die feste Randlinie als äußere Knotenlinie. Die Werte der Knotenradien und zugehörenden Frequenzen[1]) sind folgende

Tabelle 14. Zahl der inneren Knotenkreise $= s-1$.

$s-1=0$	$s-1=1$	$s-1=2$	$s-1=3$
$r_{00}^{(1)}= \quad a$	$r_{00}^{(2)}= \quad a$	$r_{00}^{(3)}= \quad a$	$r_{00}^{(4)}= \quad a$
	$r_{01}^{(2)}=0{,}436\,a$	$r_{01}^{(3)}=0{,}637\,a$	$r_{01}^{(4)}=0{,}735\,a$
		$r_{02}^{(3)}=0{,}278\,a$	$r_{02}^{(4)}=0{,}468\,a$
			$r_{03}^{(4)}=0{,}204\,a$
$N_0^{(1)}=0{,}3824\,\frac{c}{a}$	$N_0^{(2)}=0{,}878\,\frac{c}{a}$	$N_0^{(3)}=1{,}376\,\frac{c}{a}$	$N_0^{(4)}=1{,}874\,\frac{c}{a}$
$\frac{N}{N_0^{(1)}}=1{,}000$	2,298	3,600	4,900

1) Diese Tabellen 14 bis 17 enthalten die Werte der Radien für die Knotenkreise in Bruchteilen des Membranradius a. Ferner in der

2. $p = 1.$

(68) $w = A J_1(\varkappa r) \sin\varphi \sin(nt + \vartheta)$ $(\varphi_0 = 0$ angenommen).

Die Schwingung hat als Knotenlinien einen Durchmesser ($\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$) und außerdem 0, 1, 2 oder mehr Kreise je nach dem Wert von $\varkappa$. Die Wurzeln der Gleichung

(69) $$J_1(\varkappa r) = J_1(\varrho) = 0$$

(70) $$\varrho_1^{(0)} = 0;\quad \varrho_1^{(1)} = 3{,}8317;\quad \varrho_1^{(2)} = 7{,}0156;$$
$$\varrho_1^{(3)} = 10{,}1735;\quad \varrho_1^{(4)} = 13{,}3237;\quad \ldots$$

geben durch Division mit a die Werte $\varkappa$ wie in Gleichung (65) und weiter die Frequenzen

(71) $$N_1^{(1)} = \frac{3{,}8317\,c}{2\pi a};\quad N_1^{(2)} = \frac{7{,}0156\,c}{2\pi a};\quad N_1^{(3)} = \frac{10{,}1753}{2\pi a};\ \text{usw.}$$

Die 0te Wurzel $\varrho_1^{(0)} = 0$ kommt hier und in den folgenden Fällen nicht in Betracht. Sie würde einer unendlich langsamen Schwingung entsprechen. Die Radien der Knotenkreise sind entsprechend der Gleichung (67) zu berechnen, indem darin der Index 1 an Stelle des Index 0 gesetzt wird.

Tabelle 15. Zahl der inneren Knotenkreise $= s - 1$.

$s-1=0$	$s-1=1$	$s-1=2$	$s-1=3$
$r_{10}^{(1)} = a$	$r_{10}^{(2)} = a$	$r_{10}^{(3)} = a$	$r_{10}^{(4)} = a$
	$r_{11}^{(2)} = 0{,}546\,a$	$r_{11}^{(3)} = 0{,}690\,a$	$r_{11}^{(4)} = 0{,}763\,a$
		$r_{12}^{(3)} = 0{,}377\,a$	$r_{12}^{(4)} = 0{,}527\,a$
			$r_{13}^{(4)} = 0{,}288\,a$
$N_1^{(1)} = 0{,}609\,\frac{c}{a}$	$N_1^{(2)} = 1{,}115\,\frac{c}{a}$	$N_1^{(3)} = 1{,}618\,\frac{c}{a}$	$N_1^{(4)} = 2{,}120\,\frac{c}{a}$
$\frac{N}{N_0^{(1)}} = 1{,}594$	2,919	4,230	5,540

vorletzten Zeile die sekundlichen Schwingungszahlen N, wobei c die durch Spannung p und Flächendichte ϱ' der Membran bestimmte Größe $c = \sqrt{\frac{p}{\varrho'}}$ ist (vgl. Nr. 56). In der letzten Zeile sind die relativen Schwingungszahlen, bezogen auf die absolut tiefste Schwingung der Membran $N_0^{(1)}$ (Schwingung ohne Knotendurchmesser und innere Knotenkreise) angegeben.

3. $p = 2$.

(72) $w = A J_2(\varkappa r) \sin 2\varphi \sin(nt + \vartheta)$ ($\varphi_0 = 0$ angenommen);

Knotenlinien sind die zwei aufeinander senkrechten Durchmesser

$$\varphi = 0 \text{ und } \pi, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \text{ und } \frac{3\pi}{2},$$

sowie außerdem 0, 1, 2 oder mehr Kreise, je nach dem Wert von $\varkappa$. Die Wurzeln der Gleichung

(73) $$J_2(\varkappa r) = J_2(\varrho) = 0$$

(74) $\varrho_2^{(0)} = 0$; $\varrho_2^{(1)} = 5{,}135$; $\varrho_2^{(2)} = 8{,}417$; $\varrho_2^{(3)} = 11{,}620$; $\varrho_2^{(4)} = 14{,}796$; ...

ergeben durch Division mit a die $\varkappa$ und weiter die sekundlichen Frequenzen

(75) $N_2^{(1)} = \frac{5{,}135\,c}{2\pi a}$; $N_2^{(2)} = \frac{8{,}417\,c}{2\pi a}$; $N_2^{(3)} = \frac{11{,}620\,c}{2\pi a}$; usw.

Die Radien der Knotenkreise sind

Tabelle 16.
Zahl der inneren Knotenkreise $= s - 1$.

$s-1=0$	$s-1=1$	$s-1=2$	$s-1=3$
$r_{20}^{(1)} = a$	$r_{20}^{(2)} = a$	$r_{20}^{(3)} = a$	$r_{20}^{(4)} = a$
	$r_{21}^{(2)} = 0{,}610\,a$	$r_{21}^{(3)} = 0{,}724\,a$	$r_{21}^{(4)} = 0{,}785\,a$
		$r_{22}^{(3)} = 0{,}442\,a$	$r_{22}^{(4)} = 0{,}568\,a$
			$r_{23}^{(4)} = 0{,}347\,a$
$N_2^{(1)} = 0{,}817\frac{c}{a}$	$N_2^{(2)} = 1{,}339\frac{c}{a}$	$N_2^{(3)} = 1{,}848\frac{c}{a}$	$N_2^{(4)} = 2{,}370\frac{c}{a}$
$\frac{N}{N_0^{(1)}} = 2{,}135$	3,500	4,830	6,150

4. $p = 3$.

(76) $w = A J_3(\varkappa r) \sin 3\varphi \sin(nt + \vartheta)$ ($\varphi_0 = 0$ angenommen).

Knotenlinien sind drei Durchmesser, die sich unter je 60^0 schneiden und 0, 1, 2 oder mehr Knotenkreise. Die Wurzeln von

(77) $$J_3(\varkappa r) = J_3(\varrho) = 0$$

(78) $$\varrho_3^{(0)} = 0;\quad \varrho_3^{(1)} = 6{,}379;\quad \varrho_3^{(2)} = 9{,}760;\quad \varrho_3^{(3)} = 13{,}017;\quad \varrho_3^{(4)} = 16{,}224;\quad \ldots$$

ergeben die sekundlichen Frequenzen

(79) $$N_3^{(1)} = \frac{6{,}379\,c}{2\pi a};\quad N_3^{(2)} = \frac{9{,}760\,c}{2\pi a};\quad N_3^{(3)} = \frac{13{,}017\,c}{2\pi a};\ \text{usw.}$$

Die Radien der Knotenkreise sind

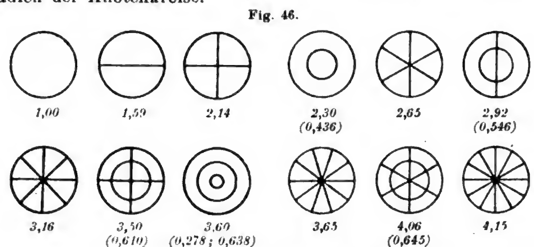
Tabelle 17.
Zahl der inneren Knotenkreise $= s - 1$.

$s-1=0$	$s-1=1$	$s-1=2$	$s-1=3$
$r_{30}^{(1)} = a$	$r_{30}^{(2)} = a$	$r_{30}^{(3)} = a$	$r_{30}^{(4)} = a$
	$r_{31}^{(2)} = 0{,}654\,a$	$r_{31}^{(3)} = 0{,}749\,a$	$r_{31}^{(4)} = 0{,}804\,a$
		$r_{32}^{(3)} = 0{,}490\,a$	$r_{32}^{(4)} = 0{,}6015\,a$
			$r_{33}^{(4)} = 0{,}394\,a$
$N_3^{(1)} = 1{,}014\,\frac{c}{a}$	$N_3^{(2)} = 1{,}550\,\frac{c}{a}$	$N_3^{(3)} = 2{,}070\,\frac{c}{a}$	$N_3^{(4)} = 2{,}580\,\frac{c}{a}$
$\frac{N}{N_0^{(1)}} = 2{,}655$	$4{,}060$	$5{,}415$	$6{,}750$

In dieser Weise kann beliebig fortgefahren werden. Die Frequenz steigt mit wachsender Anzahl der Knotendurchmesser p, und gleichzeitig werden die Radien der Knotenkreise gleicher Ordnung mit wachsendem p größer. Das ist physikalisch einleuchtend; denn die einzelnen Felder, in die die Membran sich dabei teilt, werden um den Mittelpunkt herum mit wachsender Zahl p der Knotendurchmesser immer spitzere Sektoren und leisten gegen gleichzeitige Verbiegung in tangentialer und radialer Richtung verhältnismäßig größeren Widerstand, je schmaler sie sind. Dadurch wird der innerste Knotenkreis und mit ihm die übrigen nach außen gedrängt. Durch Übereinanderlagerung verschiedener Schwingungstypen, deren Frequenzen hier alle verschieden sind, kann man beliebig komplizierte neue Schwingungsfiguren bilden. Eine Anzahl

einfacher Schwingungsfiguren, und zwar die den tiefsten Tönen entsprechenden, zeigt die Fig. 46. Die darunter stehenden Zahlen sind die relativen Schwingungszahlen, bezogen auf den absolut tiefsten Ton der Membran (Schwingung ohne inneren Knotenkreis und Knotendurchmesser). Die eingeklammerten Zahlen sind die Radien der Knotenkreise.

Fig. 46.



Die relativen Schwingungszahlen für alle überhaupt möglichen Töne innerhalb der drei ersten Oktaven sind in der Tabelle 18 mitgeteilt. (Entnommen aus Auerbach: Akustik, im Handbuch der Physik.)

Tabelle 18. Relative Schwingungszahlen aller Töne der Kreismembran in den drei ersten Oktaven.

1 00	2,14	3,16	4,06	5,13	6,10	7,07
1,59	2,30	3,50	4,15	5,14	6,15	7,08
	2.65	3,60	4,23	5,42	6,18	7,21
	2.92	3,65	4,60	5,54	6,21	7,33
			4,64	5,61	6,53	7,47
			4,83	5,66	6,59	7,52
			4,91	5 98	6,69	7,56
					6,75	7,63
					6,85	7,72
						7,90

Außer der Vollkreismembran lassen sich mittels der Lösung (60) noch andere verwandte Formen von Membranen behandeln, insbesondere die Membran in Gestalt eines Kreissektors und eines Kreisringes. Aus Raummangel muß hier auf die Wiedergabe der Resultate verzichtet werden.

7. Kapitel.

Eigenschwingungen von Platten.

61. Differentialgleichung und Grenzbedingungen. Kinetische und potentielle Energie. Die Bewegungsgleichung der Plattenschwingungen vollständig abzuleiten, verbietet der begrenzte Raum des vorliegenden Buches. Die Herleitung läßt sich nur andeuten. Sie ist im Prinzip die gleiche wie bei der Membran, nur kommen hier außer der infolge der Längsspannung wirkenden rücktreibenden Kraft auch noch deren Drehmoment und weiter auch die Schubspannungen (Querkräfte) und deren Drehmomente hinzu, wodurch die Gleichung viel komplizierter wird. Man kann wieder entweder die Kräfte und Drehmomente einzeln mittels der Deformation ausdrücken, sie in die Lagrangeschen bzw. Newtonschen Bewegungsgleichungen einsetzen, und dann wie bei den Querschwingungen der Stäbe durch passende Elimination beide Gleichungen zu einer einzigen für die Verrückung w zusammenfassen, die hier normal zur Plattenoberfläche stattfindet; oder man kann die kinetische und die potentielle Energie als Funktionen der Deformation ausdrücken und wieder nach irgendeinem allgemeinen mechanischen Prinzip (z. B. Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten u. dgl.) die Bewegungsgleichung aufstellen. Dies ist der meist (vgl. z. B. Lord Rayleigh) begangene Weg.

Es sei U die kinetische, V die potentielle Energie bei irgendeiner Verrückung w der Plattenteilchen, die mit der Geschwindigkeit $\frac{\partial w}{\partial t}$ erfolgt. Es möge ferner außer den durch die Verrückung geweckten elastischen Kräften auf jedes Massenteilchen dm eine äußere oder eingeprägte Kraft Zdm in der Richtung der Plattennormale wirken, die wir zur z-Richtung nehmen. Bei einer Änderung der Verrückung w um δw leistet diese Kraft eine gewisse Arbeit δA_z. Diese Arbeit muß nach dem Energieprinzip gleich der Zunahme der gesamten Energie der schwingenden Platte $\delta V + \delta U$ sein, also

$$\delta V + \delta U - \delta A_z = 0. \tag{1}$$

Es sei ϱ die Dichte, $2D$ die Dicke der Platte, df ein Flächenelement der Plattenoberfläche, E der Youngsche Elastizitätsmodul, μ die Poissonsche Elastizitätszahl. Es ist (die Integration über die ganze Plattenfläche erstreckt)

12*

(2) $$\delta A_z = \iint 2\,\delta w\, Z D \varrho\, df.$$

Die kinetische Energie ist

(3) $$U = \frac{1}{2}\iint 2 D\varrho \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 df; \quad \delta U = \iint 2 D\varrho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\,\delta w\, df.$$

Die potentielle Energie, in kartesischen Koordinaten x, y ausgedrückt, ist, wenn die Platte nur unter dem Einfluß ihrer eigenen Elastizität steht und nicht noch eine zusätzliche Zug- oder Druckspannung vorhanden ist,

(4) $$V = \iint \frac{E D^3}{3(1-\mu^2)} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\mu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 \right\} dx\, dy$$

oder, mit Benutzung der Bezeichnung[1]) $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \Delta w$,

(5) $$V = \iint \frac{E D^3}{3(1-\mu^2)} \left\{ (\Delta w)^2 - 2(1-\mu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2\right]\right\} dx\, dy$$

Wenn E, D, μ über die ganze Platte konstant sind, wird daher

(6) $$\delta V = \frac{2 E D^3}{3(1-\mu^2)} \left\{ \iint \Delta\Delta w\, \delta w\, df - \int \delta w\, dl \left[\frac{\partial \Delta w}{\partial \nu} + (1-\mu)\frac{\partial}{\partial l}\left(\cos\theta \sin\theta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right]\right.$$
$$\left. + \int \frac{\partial \delta w}{\partial \nu}\, dl \left[\mu \Delta w + (1-\mu)\left(\cos^2\theta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sin^2\theta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\sin\theta\cos\theta \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)\right]\right\}.$$

Hier ist dl ein Linienelement der Begrenzungskurve der Mittelfläche der (ebenen) Platte, ν die nach außen gerichtete Normale

---

1) Lord Rayleigh und die meisten anderen englischen Autoren schreiben $\nabla^2 w$ statt Δw und $\nabla^4 w$ statt $\Delta\Delta w$. Die Rechenoperation Δ ist der von Lamé eingeführte sogenannte „zweite Differentialparameter" von w; ihre zweimalige Anwendung gibt den vierten Differentialparameter

$$\Delta\Delta w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}.$$

dieser Begrenzungskurve, θ der Winkel zwischen ν und der x-Richtung.

Die Werte δA_z, δU, δV in (1) eingesetzt, führen, da δw im Innern der Fläche willkürlich gewählt werden kann, mit der einzigen Einschränkung, daß es eine stetige Funktion von x und y sein muß, zu der Differentialgleichung und den Grenz(Rand-)bedingungen:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{E D^2}{3\varrho(1-\mu^2)} \Delta\Delta w - Z = 0, \tag{7}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\delta w \left[\frac{\partial \Delta w}{\partial \nu} + (1-\mu)\frac{\partial}{\partial l}\left(\cos\theta\sin\theta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right.\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left. + (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)\right] = 0 \\
&\frac{\partial \delta w}{\partial \nu}\left[\mu\Delta w + (1-\mu)\left(\cos^2\theta\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sin^2\theta\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right.\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left. + 2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)\right] = 0, \\
&\delta w \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \quad \text{an etwaigen Ecken}^{1)}.
\end{aligned}\right. \tag{8}$$

Je nach der Befestigungsart der Platte sind die zu erfüllenden Grenzbedingungen verschieden.

62. Die drei möglichen Arten der Randbedingungen.

1. Bei eingespanntem Rand ist δw und $\frac{\partial \delta w}{\partial \nu}$ gleich Null, die Bedingungen (8) sind identisch erfüllt.

2. Bei freiem Rand sind diese beiden Größen willkürlich, also müssen die eckigen Klammern verschwinden, was zwei ziemlich komplizierte Nebenbedingungen bedeutet.

3. Bei angestemmtem (drehbar gelagerten) Rand ist $\delta w = 0$, $\frac{\partial \delta w}{\partial \nu}$ willkürlich, also muß die eckige Klammer der zweiten von den beiden Gleichungen (8) verschwinden.

Diese drei Fälle können bei einer und derselben Platte gleichzeitig an verschiedenen Teilen des Randes verwirklicht sein.

Der wichtigste, aber am schwierigsten zu lösende Fall ist der

1) H. Lamb, Proceedings of the London Mathematical Society **21**, S. 70, 1891.

Fall 2 des überall freien Randes. Er ist von G. Kirchhoff[1]) für die kreisförmige, in neuester Zeit nach einem neuen Näherungsverfahren von W. Ritz[2]) für die quadratische bzw. rechteckige Platte gelöst worden und zwar für die Eigenschwingungen der Platte, deren Gleichung

$$(9) \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \alpha^4 \Delta\Delta w = 0 \qquad \left(\alpha^4 = \frac{E D^2}{3\varrho(1-\mu^2)}\right)$$

aus (7) hervorgeht, wenn man die eingeprägte Kraft $Z = 0$ setzt.

63. Allgemeiner Ansatz der Integration. Die Lösung der Gleichung (9) läßt sich in den Fällen, wo sie bisher gelungen ist, als Produkt mehrerer Faktoren darstellen, von denen jeder nur von einer der unabhängigen Variablen (Zeit und Koordinaten der Plattenpunkte) abhängt. Die Zeitfunktion ist bei Annahme einer einfach pendelförmigen Partialschwingung wieder $\sin nt$ oder $\cos nt$ bzw. allgemeiner $\sin(nt + \vartheta)$. Nach Abspaltung dieses Faktors bleibt für den Rest w^* von w, der nur noch von den zwei Raumkoordinaten abhängt, die Gleichung

$$(10) \qquad \Delta\Delta w^* - \beta^4 w^* = 0. \qquad \left(\beta^4 = \frac{n^2}{\alpha^4}\right).$$

Je nach den speziell benutzten Koordinaten nehmen die Gleichungen (9), (10) und die Grenzbedingungen (8) verschiedene Formen an. In rechtwinkligen kartesischen Koordinaten lauten die Gleichungen (9), (10) und (8)

$$(9a) \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \alpha^4 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) = 0$$

$$(10a) \qquad \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w^*}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w^*}{\partial y^4} - \beta^4 w^* = 0$$

1) G. Kirchhoff, Ges. Abhandl. S 276. — Poggend. Ann. d. Phys.
2) W Ritz, Annalen der Physik (4) **28**, S. 737, 1909.
3) G. Kirchhoff, loc. cit. Die Bezeichnung der Konstanten ist dort

	Zahl der Knotenkreise	Zahl der Knotendurchmesser	Plattenradius	Plattendicke	Dichte
Kirchhoff . . .	μ	m bezw. n	l	2ε	ϱ
Kalähne	h	p	R	$2D$	ϱ

$$
(8a)\quad \begin{cases}
\delta w\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\cos\theta+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\sin\theta\right. \\
\quad +(1-\mu)\frac{\partial}{\partial l}\left(\cos\theta\sin\theta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right. \\
\quad \left.\left.+(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)\right]=0 \\
\left(\frac{\partial\delta w}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial\delta w}{\partial y}\sin\theta\right)\left[\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+(1-\mu)\left(\cos^2\theta\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right.\right. \\
\quad \left.\left.+\sin^2\theta\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)\right]=0 \\
\delta w\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=0 \quad \text{an Ecken der Begrenzungslinie.}
\end{cases}
$$

Die Kreisfrequenz der Schwingung ist

$$
(11)\qquad n=\alpha^2\beta^2=\beta^2 D\sqrt{\frac{E}{3\varrho(1-\mu^2)}},
$$

wobei zu jeder Partialschwingung ein besonderer Wert von β gehört.

Die Gleichung (10) wird allgemein befriedigt von allen Funktionen ψ und ω, welche den einfacheren Gleichungen genügen

$$
(10b)\qquad \Delta\psi=\beta^2\psi,\quad \Delta\omega=-\beta^2\omega.
$$

Von der Richtigkeit dieser Behauptung überzeugt man sich leicht durch Einsetzen dieser Werte in die Gleichung (10). Gleichungen der Form (10b) sind bei den Membranen bereits aufgetreten. Es handelt sich nur darum, solche Lösungen dieser Gleichungen zu finden, die auch den Randbedingungen genügen. Für Platten mit vollkommen freiem Rande ist diese Aufgabe nur für den Fall der kreisförmigen Begrenzung von Kirchhoff[3]) streng gelöst, für

u. Chem. **81**, 1850. S. 258. — Crelles Journal **40**, 1850, S. 51.

eine andere als hier Zur Vergleichung diene folgende Zusammenstellung:

Young scher Elast.-Modul	Poisson-sche Elast.-Zahl	Kirchhoff sche Elast. - Konstanten					
$q=2K\frac{1+3\theta}{1+2\theta}$	$\frac{\theta}{1+2\theta}$	K	θ	$\gamma=\frac{1+2\theta}{1+\theta}$	a^2	$16\lambda^4$	$x=l\lambda_{n\mu}$
E	μ	$\frac{E}{2(1+\mu)}$	$\frac{\mu}{1-2\mu}$	$\frac{1}{1-\mu}$	α^4	β^4	$\frac{\beta R}{2}$

quadratische bzw. rechteckige Begrenzung sind solche Funktionen nicht in expliziter endlicher Form durch die bekannten und gebräuchlichen Funktionen darstellbar. Näherungsweise lassen sie sich aber durch Kreisfunktionen und Hyperbelfunktionen und Produkte aus diesen darstellen, wie Ritz gezeigt hat.

64. Kreisförmige Platte mit freiem Rande. Eigenschwingungen. Für die kreisförmige Platte (Dicke $2D$, Radius R) benutzt man ebene Polarkoordinaten r, φ. In diesen ausgedrückt ist

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}. \tag{12}$$

Derselbe Ausdruck gilt auch für die nach Abspaltung des Zeitfaktors übrigbleibende Normal- oder Eigenfunktion w^* oder $w^{(r\varphi)}$.

Da $w^{(r\varphi)}$ in bezug auf den Winkel φ offenbar periodisch sein muß mit der Periode 2π, weil sich nach einem ganzen Kreisumlauf alles genau wiederholen muß, so kann man weiter zerspalten,

$$w^{(r\varphi)} = w^{(r)} w^{(\varphi)} \quad \text{und} \quad w^{(\varphi)} = \sin(p\varphi + \varphi_0) \tag{13}$$

setzen. Dann wird

$$\Delta w^{(r\varphi)} = w^{(\varphi)}\left[\frac{\partial^2 w^{(r)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w^{(r)}}{\partial r} - \frac{p^2}{r^2} w^{(r)}\right], \tag{14}$$

und die von $w^{(r\varphi)}$ zu erfüllenden Gleichungen (10b) gehen nach Weglassung des Faktors $w^{(\varphi)}$ auf beiden Seiten über in die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial^2 w^{(r)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w^{(r)}}{\partial r} - \frac{p^2}{r^2} w^{(r)} - \beta^2 w^{(r)} = 0, \tag{15a}$$

und

$$\frac{\partial^2 w^{(r)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w^{(r)}}{\partial r} - \frac{p^2}{r^2} w^{(r)} + \beta^2 w^{(r)} = 0. \tag{15b}$$

Die zweite von ihnen, mit dem Gliede $+\beta^2 w^{(r)}$, ist dieselbe wie die Gl. (53a) in Nr. 59, die die Schwingungen einer kreisförmigen Membran bestimmt und deren Lösungen die Besselsche und Neumannsche Zylinderfunktion $J_p(\beta r)$ und $N_p(\beta r)$ sind. Die erste Gleichung (15a) wird durch dieselben Funktionen, aber mit imaginärem Argument $i\beta r$, also $J_p(i\beta r)$ und $N_p(i\beta r)$ gelöst; denn wenn man $i\beta$ anstelle von β setzt, ändert sich an den Gleichungen (15) nur das Vorzeichen des letzten Gliedes der linken Seite.

Das allgemeine Integral $w^{(r)}$ ist also

$$w^{(r)} = A[J_p(\beta r) + \lambda J_p(i\beta r) + \lambda' N_p(\beta r) + \lambda'' N_p(i\beta r)]. \tag{16}$$

Für eine Vollkreisplatte kommt die Neumannsche Zylinderfunktion, die für $r = 0$ unendlich wird, als partikuläres Integral nicht in Betracht, d. h. λ' und λ'' in (16) sind gleich Null zu setzen. (Bei einer Kreisringplatte müßte sie mit berücksichtigt werden, was die Diskussion erschwert). Das allgemeine Integral w der Gl. (9) Nr. **62** wird daher unter Berücksichtigung der abgespaltenen Faktoren

$$(17)\qquad w = A \sin(nt + \vartheta) \sin(p\varphi + \varphi_0)\left[J_p(\beta r) + \lambda J_p(i\beta r)\right].$$

Durch geeignete Bestimmung der Werte λ und β lassen sich mit dieser Funktion w auch die beiden Grenzbedingungen erfüllen, woraus folgt, daß Gl. (17) wirklich die gesuchte allgemeine Lösung ist. Die (ganze) Zahl p ist die Anzahl der Knotendurchmesser, deren Lage durch die Gleichung $\sin(p\varphi + \varphi_0) = 0$ bestimmt wird. Die Gleichung der (konzentrischen) Knotenkreise ist $J_p(\beta r) + \lambda J_p(i\beta r) = 0$; ihre Wurzeln r sind die Radien der Kreise.

Zur Erfüllung der Grenz-(Rand-)bedingungen müssen die Konstanten λ und β — letztere durch Gl. (11) in Nr. **63** mit der Schwingungszahl n zusammenhängend — gewisse durch die Dimensionen der Platte bestimmte Werte annehmen.

Die Grenzbedingungen für freien Rand der Vollkreisplatte erhält man aus Gl. (8) bezw. (8a) durch Einführung der Zylinderkoordinaten r, φ statt x, y und Nullsetzen der beiden eckigen Klammern. Es ist

$$(18)\qquad \begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \quad & dx &= \cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi, \\ y &= r\sin\varphi, \quad & dy &= \sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi. \end{aligned}$$

Also umgekehrt

$$(19)\qquad \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \quad & dr &= \cos\varphi\, dx + \sin\varphi\, dy, \\ \varphi &= \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{y}{x}\right), \quad & d\varphi &= -\frac{\sin\varphi}{r}\, dx + \frac{\cos\varphi}{r}\, dy. \end{aligned}$$

Da andererseits nach den allgemeinen Regeln der Differentiation

$$dr = \frac{\partial r}{\partial x}\, dx + \frac{\partial r}{\partial y}\, dy, \quad d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\, dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\, dy$$

ist, so ergibt sich

$$(20)\quad \frac{\partial r}{\partial x} = \cos\varphi, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin\varphi; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\sin\varphi}{r}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\cos\varphi}{r}.$$

Mit Hilfe dieser Formeln sind die Differentialausdrücke der Gl. (8) leicht umzuformen und man erhält als Randbedingungen

$$(21)\quad \begin{cases} \left[\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right)+\dfrac{1-\mu}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial r}-\dfrac{w}{r}\right)\right]_{r=R}=0, \\ \left[\mu\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right)+(1-\mu)\dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right]_{r=R}=0. \end{cases}$$

Hier ist nach Ausführung der Differentiationen $r=R$ zu setzen. Durch Einsetzen der durch Integration erhaltenen Funktion w aus Gl. (17) und Abspaltung der überflüssigen Faktoren ergibt sich daraus

$$(22)\quad \begin{cases} \left[\dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{d^2 w^{(r)}}{dr^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{d w^{(r)}}{dr}-\dfrac{p^2}{r^2}w^{(r)}\right)-\dfrac{(1-\mu)p^2}{r^2}\left(\dfrac{d w^{(r)}}{dr}-\dfrac{w^{(r)}}{r}\right)\right]_{r=R}=0, \\ \left[\mu\left(\dfrac{d^2 w^{(r)}}{dr^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{d w^{(r)}}{dr}-\dfrac{p^2}{r^2}w^{(r)}\right)+(1-\mu)\dfrac{d^2 w^{(r)}}{dr^2}\right]_{r=R}=0, \end{cases}$$

wobei

$$(23)\qquad w^{(r)}=J_p(\beta r)+\lambda J_p(i\beta r)$$

ist. Führt man nun für $w^{(r)}$ seinen Wert (23) wirklich ein, so erhält man nach einigen Umformungen mit Benutzung der für $J_p(\beta r)$ und $J_p(i\beta r)$ gültigen Differentialformeln (15a) und (15b) die beiden Gleichungen zur Berechnung von λ und β

$$(24)\quad \begin{cases} \lambda=-\dfrac{\beta^3 R^3 J_p'(\beta R)+(1-\mu)p^2[\beta R J_p'(\beta R)-J_p(\beta R)]}{-i\beta^3 R^3 J_p'(i\beta R)+(1-\mu)p^2[i\beta R J_p'(i\beta R)-J_p(i\beta R)]}, \\ \lambda=-\dfrac{(1-\mu)[-\beta R J_p'(\beta R)+p^2 J_p(\beta R)]-\beta^2 R^2 J_p(\beta R)}{(1-\mu)[-i\beta R J_p'(i\beta R)+p^2 J_p(i\beta R)]+\beta^2 R^2 J_p(i\beta R)}. \end{cases}$$

Hier bedeutet J' die Ableitung der Funktion J nach ihrem Argument, also βr bezw. $i\beta r$; die erst nach erfolgter Differentiation vorzunehmende Ersetzung des variablen r durch das konstante R ist in den obigen Gleichungen der einfacheren Schreibart wegen schon ausgeführt. Der Nenner der beiden Brüche rechts geht aus dem betreffenden Zähler hervor, indem man β durch $i\beta$ ersetzt.

Durch Elimination von λ ergibt sich eine Gleichung zur Bestimmung der zulässigen Werte von β, die eine unendliche Reihe diskreter Werte bilden. Diese komplizierte transzendente Gleichung — einfach zu erhalten durch Gleichsetzen der beiden Ausdrücke für λ in Gl. (24) — ist von Kirchhoff[1]) aufgelöst worden in der Form

1) G. Kirchhoff, Ges. Abhandl. S. 274. Leipzig (J. A. Barth) 1882. Crelles Journal **40**, S. 84, 1850.

$$(25)\qquad \operatorname{tg}\left(\beta R - p\,\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\frac{B}{8\beta R} + \frac{C}{(8\beta R)^2} - \frac{D}{(8\beta R)^3} + \cdots}{A + \frac{B}{8\beta R} + \frac{D}{(8\beta R)^3} + \cdots},$$

wobei

$$(26)\qquad \begin{cases} A = (1-\mu)^{-1}, \\ B = A(1-4p^2) - 8, \\ C = A(1-4p^2)(9-4p^2) + 48(1+4p^2), \\ D = -\frac{A}{3}[(1-4p^2)(9-4p^2)(13-4p^2)] \\ \qquad\qquad + 8(9+136p^2+80p^4). \end{cases}$$

Bei kleinem βR, d. h. für die Wurzeln niederer Ordnung muß man in den Reihen der rechten Seite von (25) mehrere Glieder benutzen; bei großem βR, d. h. für die höheren Wurzeln, wenn nicht zugleich p groß ist, gilt näherungsweise

$$(27)\quad \operatorname{tg}\left(\beta R - p\frac{\pi}{2}\right) = 0, \text{ also } \beta R = \frac{\pi}{2}(p+2h), \quad (h = \text{ganze Zahl}).$$

Für $p = 0$, d. h. für eine um den Plattenmittelpunkt symmetrische Schwingung wird die zu lösende Gleichung am einfachsten. Für diesen Fall wird (25) und (26), wenn man noch $\mu = \frac{1}{4}$ annimmt,

$$A = \tfrac{4}{3}; \quad B = -\tfrac{20}{3}; \quad C = 60; \quad D = 20$$

$$(28)\qquad \operatorname{tg}\beta R = \frac{-\frac{5}{6\beta R} + \frac{15}{16\beta^2 R^2} - \frac{5}{128\beta^3 R^3} + \cdots}{\frac{4}{3} - \frac{5}{6\beta R} + \frac{5}{128\beta^3 R^3} + \cdots}.$$

Die rechts stehende Funktion in (28) hat für alle Werte βR, die größer sind als 1, einen sehr kleinen Wert, der sich mit wachsendem βR immer mehr der Null nähert.[1]) Daher ist schon die zweite Wurzel der Gl. (28) von π nur wenig verschieden, die höheren Wurzeln sind fast genau ganzzahlige Vielfache von π. Ähnliches gilt für die anderen Fälle, wo $p = 1, 2 \ldots$ ist, wo also $1, 2 \ldots$ Knotendurchmesser vorhanden sind.

1) Für $\beta R = \frac{1}{2}$, bezw. 1, bezw. 2 sind diese Werte -85, bezw. $+\frac{25}{207}$ bezw. $-\frac{35}{176}$; die folgenden Werte bleiben negativ und nähern sich immer mehr der Null.

Die Zahl h ist die Anzahl der Knotenkreise. Für die höheren Partialschwingungen — mit ziemlicher Genauigkeit (etwa 2%) schon von der zweiten ($h = 2$) an — gilt daher das einfache durch Gl. (27) dargestellte Gesetz der Schwingungszahlen, welches Chladni experimentell gefunden hat. Mit Rücksicht auf die Beziehung zwischen β und der zyklischen Schwingungsfrequenz n in Gl. (11) und (9) Nr. 62 und 63 gilt nämlich für die höheren Partialtöne

$$(29) \qquad n_{p,h} = \frac{(p+2h)^2\pi^2 D}{4R^2}\sqrt{\frac{E}{3\varrho(1-\mu^2)}}, \quad \begin{pmatrix} h = (1), 2, 3 \dots \\ p = 0, 1, 2 \dots \end{pmatrix}.$$

Ganz allgemein (auch für die tieferen Partialtöne) ist

$$(29\text{a}) \qquad n = \beta^2\alpha^2 = \frac{(\beta R)^2 D}{R^2}\sqrt{\frac{E}{3\varrho(1-\mu^2)}}.$$

Das bedeutet: die Frequenzen der (höheren) Partialtöne stehen angenähert im Verhältnis der Quadrate der aufeinanderfolgenden geraden oder ungeraden ganzen Zahlen, je nachdem die Anzahl p der Knotendurchmesser gerade oder ungerade ist; also für

$$\begin{array}{ll}
p = 0, \dots \text{ ist} & (n_1) : n_2 : n_3 \dots = (2^2) : 4^2 : 6^2 \dots \\
p = 2 & (n_1) : n_2 : n_3 \dots = (4^2) : 6^2 : 8^2 \dots \\
\dots & \dots \\
p = 1 & (n_1) : n_2 : n_3 \dots = (3^2) : 5^2 : 7^2 \dots \\
p = 3 & (n_1) : n_2 : n_3 \dots = (5^2) : 7^2 : 9^2 \dots \\
\dots & \dots
\end{array}$$

Aus (29) folgt weiter, daß die Frequenz der Plattendicke $2D$ proportional, dem Quadrat des Plattendurchmessers $2R$ umgekehrt proportional ist.

Die tiefsten Töne bei gegebener Anzahl p von Knotendurchmessern erhält man aus den kleinsten Wurzeln der Gleichung (25), die besonders berechnet werden müssen.

Kirchhoff gibt hierfür folgende relativen Werte der Schwingungszahlen, bezogen auf die Schwingungszahl der Grundschwingung ($p = 2$, $h = 0$) d. h. der Schwingung mit zwei Knotendurchmessern aber ohne Knotenkreise als Einheit

Tabelle 19.

Zahl der Knoten-kreise h	Zahl der Knotendurchmesser						Poissonsche Elastizitätszahl μ
	$p=0$	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$	
0		—	1,0000	2,3124	4,0485	6,1982	$\mu=\frac{1}{4}$
1	1,6131	3,7032	6,4033	9,6445	13,3937	17,6304	
2	6,9559	10,8383	15,3052	20,3249	—	—	
3	15,9031	—	—	—	—	—	
0	—	—	1,0000	2,3274	—	—	$\mu=\frac{1}{3}$
1	1,7284	3,9072	6,7111	10,0762	—	—	
2	7,3344	11,4003	—	—	—	—	

65. Rechteckige Platte mit freiem Rande. Zurückführung auf ein Minimalproblem. Bei der rechteckigen und der quadratischen Platte mit freiem Rand gelingt es nicht, die Normalfunktionen w streng durch eine der bekannten Funktionen in geschlossener Form auszudrücken. Man kann sie aber nach Ritz[1]) mit beliebiger Annäherung durch eine konvergente Reihenentwicklung darstellen, die aus Polynomen, und zwar einfachen Produkten geeigneter Grundfunktionen gebildet wird. Passende Grundfunktionen sind die Normalfunktionen der Schwingungen gerader Stäbe mit freien Enden, die in Nr. **52** behandelt und mit $v_k(x)$ bezeichnet worden sind.

Da diese Lösung keine strenge, sondern eine Näherung ist, die mit wachsender Zahl der Glieder der Reihe immer besser wird, so ist klar, daß die Differentialgleichung der Bewegung und die Grenzbedingungen nur annähernd erfüllt werden, wenn man die Reihe irgendwo abbricht und nur einige Glieder von ihr benutzt. Es ist also Aufgabe der Rechnung, die Funktionen $v_k(x)$ so auszuwählen und eine Näherungslösung $w_{(s)}$ aus ihnen so zu bilden, daß der verbleibende Fehler möglichst gering wird. Statt aber die Fehlerreste,

1) W. Ritz, Annalen der Physik (4) **28**. (1909) S. 737. Dasselbe Verfahren ist im Anschluß an Ritz von E. Reinstein (Ann. d. Phys. (4) **35**. (1911) S. 109) auf elliptische Membranen angewandt worden. Übrigens ist die Grundlage desselben — das Minimumproblem — schon von Lord Rayleigh u. a. in ähnlichen, aber einfacheren Fällen benutzt worden.

welche beim Einsetzen der (abgebrochenen) Reihe in die Differentialgleichungen der Bewegung übrig bleiben, möglichst klein zu machen, kann man auch anders verfahren. Zweckmäßiger ist es nämlich, nicht diese Abweichung zu einem Minimum zu machen, sondern die Abweichung, welche der mittels $w_{(s)}$ berechnete Wert der potentiellen Energie $V_{(s)}$ gegen den richtigen Wert V besitzt.

Nun ist bei der wirklich stattfindenden Bewegung, die durch den genauen Wert w dargestellt wird, die potentielle Energie kleiner als bei allen andern Bewegungen w', die ebenfalls mit den Bedingungen des Problems vereinbar sein würden. Diese Eigenschaft, welche die wirklich stattfindende Bewegung vor den übrigen möglichen (virtuellen) Bewegungen auszeichnet, dient ja übrigens nach den Prinzipien der Mechanik gerade dazu, die wahre Bewegung aus der Schar der virtuellen herauszufinden. Die Minimumforderung für V ist nichts anderes als die besondere Form, auf welche sich das Hamiltonsche Prinzip der kleinsten Wirkung in diesem speziellen Fall reduziert.

Ist aber der genaue Wert von V ein Minimum, so muß auch der mit $w_{(s)}$ berechnete Wert $V_{(s)}$ ein Minimum sein, damit die Abweichung zwischen beiden selbst ein Minimum wird. Damit ist die Aufgabe auf ein Minimumproblem zurückgeführt, das sich nach den Regeln der Variationsrechnung lösen läßt.

Es handelt sich dabei um ein Minimumproblem mit Nebenbedingungen. Sämtliche überhaupt zulässige Normalfunktionen w müssen nämlich, wie aus der Theorie der Differentialgleichungen hervorgeht, die „Orthogonalitätsbedingungen" erfüllen. D. h., wenn die wirklich stattfindenden Bewegungen mit w_0, w_1, $w_2 \ldots$ bezeichnet werden, so gelten die Orthogonalitätsgleichungen der Normalfunktionen

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \iint w_0^2 dx\,dy = \text{konst}; & \iint w_1^2 dx\,dy = \text{konst}, \ldots \\ \iint w_0 w_1 dx\,dy = 0; & \iint w_0 w_2 dx\,dy = 0, \ldots \end{array} \right.$$

oder allgemein ausgedrückt

$$(30\text{a}) \quad \iint w_n^2 dx\,dy = \text{konst}; \quad \iint w_m w_n dx\,dy = 0 \quad (m \gtrless n).$$

Die Integrationen sind über die Fläche der Platte — genauer über ihre Mittelfläche, d. h. die in der Mitte zwischen den beiden Oberflächen zu konstruierende Fläche — zu erstrecken. Die Funktionen w_0, $w_1 \ldots$ entsprechen den Partialschwingungen.

Aus der Differentialgleichung (10a) nebst den Randbedingungen (8a) läßt sich durch rein mathematische Umformung die genannte Minimumforderung für V mit den Nebenbedingungen (30) ableiten, und umgekehrt kann man aus dieser Minimumforderung und den Bedingungen (30) jene Differentialgleichung mit Grenzbedingungen durch Variation herleiten. Der Mangel an Raum verbietet hier die Ausführung, das Verfahren soll nur skizziert werden.

Gefordert wird, daß die potentielle Energie V, welche in Gl. (4) Nr. 61 als Funktion von x und y angegeben ist, ein Minimum wird, während gleichzeitig $\iint w^2 dx\,dy = \mathsf{A}$ ist, wo A eine gegebene Konstante bezeichnet. Nach den Regeln der Variationsrechnung wird dies Integral, mit einer zunächst unbekannten Konstante $-\lambda$ multipliziert, zu V hinzugefügt und die so erhaltene Funktion $V - \lambda \mathsf{A}$ variiert, indem w durch $w + \delta w$ ersetzt wird, wobei δw eine stetige und differentiierbare, sonst aber willkürliche Funktion von x und y darstellt. In der Gegend eines Minimums (oder Maximums) muß die totale Variation von $V - \lambda \mathsf{A}$, die man auf diese Weise bildet, gleich Null sein.

Entwickelt man die einzelnen Funktionen unter den Integralzeichen nach dem Taylorschen Satze in Reihen, die nach Potenzen von δw bzw. $\frac{\partial \delta w}{\partial x}$ und $\frac{\partial \delta w}{\partial y}$ fortschreiten, und wählt δw so klein, daß die höheren Glieder vernachlässigt werden können, so reduziert sich die totale Variation auf die Variation 1. Ordnung, d. h. auf die Glieder, welche δw, und Differentialquotienten von δw nach x und y in der 1. Potenz als Faktor enthalten. Durch partielle Integration kann man schließlich den ganzen Ausdruck, der Null werden muß, in die Form bringen: (Gl. (31) s. nachstehende Seite)

Der Ausdruck besteht aus einem Oberflächenintegral, mehreren Rand-(Linien-)integralen, die für die Plattenkanten gelten, und einem Gliede ohne Integralzeichen, das für die Ecken gilt. Der Koordinatenursprung liegt im Plattenmittelpunkt, die Achsen sind den Kanten parallel. Länge und Breite der Platte sind a und b. Durch Nullsetzen der einzelnen Integranden und des vom Integralzeichen freien Gliedes erhält man die Differentialgleichung der Normalfunktionen (10a) und die Randbedingungen (8a) von Nr. 63, letztere in etwas andrer Form als früher. Die neue Form geht aus der früheren übrigens hervor, wenn man für $\cos\theta$ und $\sin\theta$

$$
(31) \quad \left\{
\begin{aligned}
&\iint \delta w \left\{ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - \lambda w \right\} dx\, dy \\
&- \int \delta w \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + (1-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right]_{y=-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dx \\
&- \int \delta w \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} + (1-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} \right]_{x=-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} dy \\
&+ \int \frac{\partial \delta w}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]_{y=-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dx \\
&+ \int \frac{\partial \delta w}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]_{x=-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} dy + 2(1-\mu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]_{x=-\frac{a}{2},\ y=-\frac{b}{2}}^{+\frac{a}{2},\ +\frac{b}{2}} \delta w = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

die Werte einsetzt, welche jeweils an einer Plattenkante gelten. Die Randbedingungen zerfallen hier naturgemäß in mehrere einzelne Teile, die für die einzelnen geraden Stücke der Begrenzungskurve gelten.

Genau wie früher ergibt sich, daß die Konstante λ eine unendliche Reihe von diskreten Werten annehmen kann, welche durch die Dimensionen und die Materialkonstanten (das Poissonsche Verhältnis μ) der Platte festgelegt sind, und daß nur für diese Werte das Gleichungssystem überhaupt Lösungen besitzt. Jedem Werte λ entspricht eine Normalfunktion w_n^*, d. h. eine Partialschwingung. Die Größe λ ist identisch mit β^4 von Gl. (10) in Nr. **63**, die (Kreis-)Frequenz der Schwingungen wird also

$$
(31') \qquad n = D\sqrt{\lambda} \sqrt{\frac{E}{3\varrho(1-\mu^2)}}.
$$

Es ist $2D$ = Plattendicke, ϱ = Dichte, E = Elastizitätsmodul, μ = Poissonsches Verhältnis der Querkontraktion zur Längsdilatation.

66. Das Ritzsche Näherungsverfahren mit Reihenentwickelung der Normalfunktionen. Das Ritzsche Verfahren besteht in folgendem. Jede Normalfunktion w^* wird ersetzt durch eine Reihenentwicklung

$$w_{(s)}^* = a_1\psi_1 + a_2\psi_2 + \cdots + a_s\psi_s, \tag{32}$$

wobei die ganze Zahl s die Anzahl der benutzten Glieder der Reihe und damit den Grad der Annäherung angibt. Für $\psi_1, \psi_2, \dots \psi_s$ werden solche Funktionen der Koordinaten x, y gewählt, daß die Reihe konvergiert und daher jede beliebige stetige und differentiierbare Funktion w^* mit immer größerer Genauigkeit auszudrücken gestattet, je größer s gewählt wird. Solche Funktionen sind Polynome der Koordinaten x, y, ferner die Sinus- und Kosinusfunktion, was Fourierreihen ergeben würde, und schließlich auch Normalfunktionen andrer schwingender Gebilde, z. B. von elastischen Stäben (Stabfunktionen) usw. Die zuletzt genannte Form wird hier als geeignetste benutzt. Aus Symmetrieeigenschaften und anderen Gründen läßt sich schließen, welche speziellen Funktionen aus einer solchen unendlich großen Schar von Normalfunktionen für den Ansatz (32) in Betracht kommen, und es bleibt dann nur noch die Aufgabe, die Koeffizienten $a_1, a_2 \dots$ so zu bestimmen, daß die potentielle Energie ein Minimum wird. Das kommt aber auf die Lösung des vorhergenannten Minimumproblems mit der Nebenbedingung $\iint w^{*2}dx\,dy = \text{konst} = A$ hinaus, da die Normalfunktionen diese Bedingung (und die zweite Orthogonalitätsbedingung $\iint w_m^* w_n^* dx\,dy = 0$ für $m \gtrless n$) erfüllen müssen. Die Bestimmung der s Koeffizienten $a_1 \dots a_s$ erfordert hierbei die Lösung einer algebraischen Gleichung s^{ten} Grades für λ, aus der sich die s kleinsten Werte der unendlichen Zahl von Werten dieser, die Schwingungszahl bestimmenden, Größe ergeben.

Durch Einsetzen des Wertes $w_{(s)}^*$ aus (32) in den Ausdruck (4) in Nr. 61 für die potentielle Energie V wird V zu einer Funktion der $a_1 \dots a_s$. Läßt man den hier belanglosen Faktor vor dem Integralzeichen in V weg, so muß nunmehr das übrig bleibende Integral J_s (s. Gl. (33) auf nachstehender Seite) ein Minimum werden, während zugleich das Integral[1]) U_s (s. Gleichung (34)) konstant sein soll.

1) Die Größe U bedeutet hier nicht wie früher die kinetische Energie; jedoch hängt sie offenbar mit ihr eng zusammen.

$$(33)\begin{cases} J_s = \iint \Big\{ a_1^2 \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2}\right)^2 + a_2^2 \left(\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2}\right)^2 + \cdots \\ \qquad + 2 a_1 a_2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + 2 a_1 a_3 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x^2} + \cdots \\ \quad + a_1^2 \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2}\right)^2 + a_2^2 \left(\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2}\right)^2 + \cdots \\ \qquad + 2 a_1 a_2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} + 2 a_1 a_3 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial y^2} + \cdots \\ \quad + 2\mu \Big[a_1^2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} + a_1 a_2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} + a_1 a_3 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial y^2} + \cdots \\ \qquad + a_2 a_1 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} + a_2^2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} + \cdots\cdots \\ \qquad + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \Big] \\ \quad + 2(1-\mu) \Big[a_1^2 \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y}\right)^2 + a_2^2 \left(\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial y}\right)^2 + \cdots \\ \quad + 2 a_1 a_2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial y} + 2 a_1 a_3 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x \partial y} + \cdots \Big] \Big\} \, dx\, dy = \text{Min.} \end{cases}$$

$$(34) \quad \begin{cases} U_s = \iint w_{(s)}^{*2} \, dx\, dy = \iint \{ a_1^2 \psi_1^2 + a_2^2 \psi_2^2 + \cdots \\ \qquad + 2 a_1 a_2 \psi_1 \psi_2 + 2 a_1 a_3 \psi_1 \psi_3 + \cdots \} \, dx\, dy = \text{konst.} \end{cases}$$

Wird U_s, mit dem unbestimmten Faktor $-\lambda_s$ multipliziert, zu J_s addiert und nun die Rechnungsregel der Variationsrechnung auf diese Summe $J_s - \lambda_s U_s$, die ebenfalls ein Minimum werden muß, angewandt, indem man statt $a_1, a_2 \ldots a_1 + \delta a_1, a_2 + \delta a_2, \ldots$ setzt, so erhält man zur Bestimmung der $a_1, a_2 \ldots a_s$ und λ_s die s Gleichungen

$$(35) \quad \frac{\partial J_s}{\partial a_1} - \lambda_s \frac{\partial U_s}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial J_s}{\partial a_2} - \lambda_s \frac{\partial U_s}{\partial a_2} = 0, \quad \ldots \frac{\partial J_s}{\partial a_s} - \lambda_s \frac{\partial U_s}{\partial a_s} = 0.$$

Diese Gleichungen sind linear in den Unbekannten $a_1 \ldots a_s$; denn die Funktionen J_s und U_s sind quadratisch in diesen Größen. Sie sind außerdem homogen, da Glieder ohne einen Faktor a nicht vorkommen. Nun können aber s homogene lineare Gleichungen mit s Unbekannten nur erfüllt werden, wenn die Determinante ihrer Koeffizienten Null ist, sonst sind die Gleichungen überhaupt nicht miteinander verträglich. Führt man die Differentiationen in

(35) aus und ordnet die Ausdrücke nach den a, so kann man das Gleichungssystem (35) schreiben

$$(36)\qquad \sum_{p=1}^{s}(\alpha_p^{(q)} - \lambda_s \beta_p^{(q)}) a_p = 0 \quad \text{für} \quad q = 1, 2 \ldots s,$$

oder ausgeschrieben

$$(36\text{a})\qquad \begin{cases} (\alpha_1^{(1)} - \beta_1^{(1)}\lambda_s) a_1 + (\alpha_2^{(1)} - \beta_2^{(1)}\lambda_s) a_2 + \cdots \\ \qquad\qquad + (\alpha_s^{(1)} - \beta_s^{(1)}\lambda_s) a_s = 0 \\ (\alpha_1^{(2)} - \beta_1^{(2)}\lambda_s) a_1 + (\alpha_2^{(2)} - \beta_2^{(2)}\lambda_s) a_2 + \cdots \\ \qquad\qquad + (\alpha_s^{(2)} - \beta_s^{(2)}\lambda_s) a_s = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (\alpha_1^{(s)} - \beta_1^{(s)}\lambda_s) a_1 + (\alpha_2^{(s)} - \beta_2^{(s)}\lambda_s) a_2 + \cdots \\ \qquad\qquad + (\alpha_s^{(s)} - \beta_s^{(s)}\lambda_s) a_s = 0. \end{cases}$$

Die Determinantengleichung ist also

$$(37)\qquad \begin{vmatrix} \alpha_1^{(1)} - \beta_1^{(1)}\lambda_s, & \alpha_2^{(1)} - \beta_2^{(1)}\lambda_s, & \ldots & \alpha_s^{(1)} - \beta_s^{(1)}\lambda_s \\ \alpha_1^{(2)} - \beta_1^{(2)}\lambda_s, & \alpha_2^{(2)} - \beta_2^{(2)}\lambda_s, & \ldots & \alpha_s^{(2)} - \beta_s^{(2)}\lambda_s \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \alpha_1^{(s)} - \beta_1^{(s)}\lambda_s, & \alpha_2^{(s)} - \beta_2^{(s)}\lambda_s, & \ldots & \alpha_s^{(s)} - \beta_s^{(s)}\lambda_s \end{vmatrix} = 0.$$

Die neu eingeführten konstanten Koeffizienten haben die Werte

$$(38)\qquad \begin{cases} \alpha_m^{(n)} = \alpha_n^{(m)} = \displaystyle\iint \Big\{ \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial y^2} \\ \qquad\qquad + \mu \dfrac{\partial^2 \psi_n}{\partial x^2} \dfrac{\partial^2 \psi_m}{\partial y^2} + 2(1-\mu) \dfrac{\partial^2 \psi_m}{\partial x \partial y} \dfrac{\partial^2 \psi_n}{\partial x \partial y} \Big\} dx\, dy, \\ \beta_m^{(n)} = \beta_n^{(m)} = \displaystyle\iint \psi_m \psi_n \, dx\, dy. \end{cases}$$

Sind die Funktionen ψ „Normalfunktionen", so vereinfachen sich sämtliche Glieder der Determinante außer denen der Hauptdiagonale, indem die $\beta_m^{(n)} = \beta_n^{(m)} = 0$ werden, wenn $m \neq n$ ist.

Von den s Wurzeln dieser Determinantengleichung $\lambda_s^{(\mathrm{I})}, \lambda_s^{(\mathrm{II})} \ldots$ entspricht die kleinste der Grundschwingung (1. Partialschwingung), die nächst größere der 1. Oberschwingung (2. Partialschwingung) usw. Zu jedem dieser λ_s erhält man durch Auflösung der Gleichungen (36a) ein System von Koeffizienten a_1,

$a_2, \ldots a_s$ und damit mittelst (32) eine (angenähert richtige) Normalfunktion w^*, nämlich $w^{\mathrm{I}*}_{(s)}$ für die Grundschwingung, $w^{\mathrm{II}*}_{(s)}$ für die 1. Oberschwingung usw. Der Index s bezeichnet dabei immer die zur Berechnung benutzte Anzahl Glieder der Reihe (32), durch welche die Normalfunktion der schwingenden Platte w^* näherungsweise dargestellt wird. Mit wachsendem s wird die Annäherung besser, daher kommen die Wurzeln $\lambda_s^{(\mathrm{I})}, \lambda_s^{(\mathrm{II})} \ldots$ den wahren Werten $\lambda^{(\mathrm{I})}, \lambda^{(\mathrm{II})} \ldots$ immer näher, je größer man s wählt. Um so umständlicher wird aber auch die Rechnung.

67. Form der brauchbaren Funktionen. Koeffizientenberechnung für die quadratische Platte mit freiem Rande. Statt der bisherigen Bezeichnung der Funktionen ψ und der Koeffizienten a mit einem einfachen Index soll von jetzt an die mit Doppelindex benutzt werden, da die ψ und a von zwei Koordinaten abhängen. Ferner sollen für die ψ sofort Produkte aus je zwei Normalfunktionen des schwingenden Stabes eingesetzt werden, so daß man erhält

$$\psi_{hk} = u_h(x) \cdot v_k(y) \qquad \begin{pmatrix} h = 0, 1, 2 \ldots \\ k = 0, 1, 2 \ldots \end{pmatrix}, \tag{39}$$

$$\left\{ \begin{aligned} w^*_{(ss)} &= A_{00}\psi_{00} + A_{10}\psi_{10} + A_{01}\psi_{01} + A_{11}\psi_{11} \\ &\qquad + A_{20}\psi_{20} + A_{02}\psi_{02} + \cdots \\ &= A_{00}u_0(x)v_0(y) + A_{10}u_1(x)v_0(y) + A_{01}u_0(x)v_1(y) \\ &\qquad + A_{11}u_1(x)v_1(y) + \cdots; \end{aligned} \right. \tag{40}$$

u und v sind die gleichen Funktionen, nur von verschiedenen Koordinaten abhängig, und, zur bequemeren Unterscheidung auch ohne beigefügtes Argument, mit verschiedenen Buchstaben bezeichnet.

Die Auswahl der brauchbaren Funktionen u und v läßt sich nach Symmetrieeigenschaften ausführen. Aus der Form der Gleichungen (8) bis (10) in Nr. 63 folgt, daß auch $w(-x, +y)$ eine Lösung ist, wenn $w(+x, +y)$ eine ist, und zwar gilt für beide derselbe Wert λ, d. h. dieselbe Schwingungsfrequenz. Entpricht nun w einem *einfachen* Ton, d. h. einem Ton, dem nur eine einzige Schwingungsfigur der Platte zugehört, so folgt, daß $w(-x, +y)$ mindestens dem absoluten Werte nach gleich $w(+x, +y)$ sein muß, sonst könnte man durch Vertauschung der positiven mit der negativen x-Richung eine zweite, mit der ersten nicht zur Deckung zu bringende Schwingungsfigur konstruieren, welche demselben λ

(derselben Frequenz) entspricht. Dann hätte man aber den nach Voraussetzung ausgeschlossenen „Doppelton" statt eines einfachen. $w(-x, y)$ kann sich also von $w(+x, +y)$ höchstens durch das Vorzeichen unterscheiden. Ist dieses ungleich, so ist $w(x, y)$ in bezug auf die y-Achse eine ungerade, sonst eine gerade Funktion. Das analoge gilt für die Symmetrie um die x-Achse. D. h. also: einfachen Tönen entsprechen Funktionen, die sowohl in bezug auf die x-Achse, wie in bezug auf die y-Achse (die beiden Mittellinien des Rechtecks) gerade oder ungerade sind.

Für die quadratische Platte kann man noch weiter gehen. Vertauscht man hier die Bezeichnungen x und y, so ändert sich die Form der Gleichungen gar nicht. Also muß $w(y, x)$ ebenfalls eine Lösung sein, die zu demselben λ wie $w(x, y)$ gehört und sich von $w(x, y)$ höchstens durch das Vorzeichen unterscheidet. Daraus folgt aber sofort: einfache Töne (quadratischer Platten) entsprechen Funktionen, die in bezug auf x und y symmetrisch oder antisymmetrisch sind. Im ersten Fall ändert sich das Vorzeichen von w nicht bei Vertauschung von x mit y, im zweiten ändert es sich.

Mehrfache Töne können durch Superposition solcher einfachen Lösungen erhalten werden.

Aus dem Gesagten ergibt sich, daß bei einfachen Tönen die Funktionen ψ_{hk} und ψ_{kh} immer zu bestimmten Gruppen vereinigt auftreten müssen, und daß ihre Koeffizienten entweder vollkommen gleich oder nur durch das Vorzeichen verschieden sind. Ist die Schwingung, d. h. die Funktion $w^*_{(ss)}$, symmetrisch in bezug auf x und y, so ist in der Reihe (40) überall $A_{hk} = A_{kh}$; ist sie antisymmetrisch, so ist in (40) $A_{hk} = -A_{kh}$. Ist weiter $w^*_{(ss)}$ in bezug auf beide Achsen gerade, so können nur Glieder mit geradem h und k vorkommen; ist $w^*_{(ss)}$ ungerade in bezug auf beide Achsen, so können nur ungerade h und k vorkommen usw. Man kommt also allgemein zu Gruppenanordnungen der Glieder von der Form $u_h(x) v_k(y) \pm u_k(x) v_h(y)$, wobei das $+$ Zeichen für symmetrische, das $-$ Zeichen für antisymmetrische Schwingungen gilt.

Nachdem so die in jedem besonderen Falle brauchbaren Funktionen $u_h(x)$, $v_k(y)$ ausgewählt und zu passenden Gruppen vereinigt sind, müssen noch die Werte der Koeffizienten A_{hk} berechnet werden. Das geschieht nach dem im vorhergehenden (Nr. 66) für die Koeffizienten $a_1, a_2 \dots$ skizzierten Verfahren, nur sind die Be-

zeichnungen wegen der Doppelindizes etwas anders zu wählen. Das Wesentliche des Verfahrens besteht in einer solchen Bestimmung der Koeffizienten A_{hk}, daß der Ausdruck $w^*_{(ss)}$ von Gl. (40) die potentielle Energie V zu einem Minimum macht. Zu dem Zweck müssen die Gl. (36a) gelten, die hier die Form annehmen

$$(41)\begin{cases} (\alpha_{00}^{(00)}-\beta_{00}^{(00)}\lambda_s)A_{00}+(\alpha_{01}^{(00)}-\beta_{01}^{(00)}\lambda_s)A_{01}+(\alpha_{10}^{(00)}-\beta_{10}^{(00)}\lambda_s)A_{10}+\cdots \\ \qquad +(\alpha_{ss}^{(00)}-\beta_{ss}^{(00)}\lambda_s)A_{ss}=0 \\ (\alpha_{00}^{(01)}-\beta_{00}^{(01)}\lambda_s)A_{00}+(\alpha_{01}^{(01)}-\beta_{01}^{(01)}\lambda_s)A_{01}+(\alpha_{10}^{(01)}-\beta_{10}^{(01)}\lambda_s)A_{10}+\cdots \\ \qquad +(\alpha_{ss}^{(01)}-\beta_{ss}^{(01)}\lambda_s)A_{ss}=0 \\ (\alpha_{00}^{(10)}-\beta_{00}^{(10)}\lambda_s)A_{00}+(\alpha_{01}^{(10)}-\beta_{01}^{(10)}\lambda_s)A_{01}+\cdots\cdots=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (\alpha_{00}^{(ss)}-\beta_{00}^{(ss)}\lambda_s)A_{00}+(\alpha_{01}^{(ss)}-\beta_{01}^{(ss)}\lambda_s)A_{01}+(\alpha_{10}^{(ss)}-\beta_{10}^{(ss)}\lambda_s)A_{10}+\cdots \\ \qquad +(\alpha_{ss}^{(ss)}-\beta_{ss}^{(ss)}\lambda_s)A_{ss}=0. \end{cases}$$

Daraus folgt die der Gl. (37) entsprechende Gleichung, indem man die Koeffizienten der Größen A_{00}, $A_{01}\ldots A_{11}$ als Glieder der verschwindenden Determinante hinschreibt. Die Größen $\alpha_{00}^{(00)}$, $\alpha_{00}^{(01)}\ldots$, $\beta_{00}^{(00)}$, $\beta_{00}^{(01)}\ldots$, die den Größen (38) entsprechen, sind in der Schreibweise mit Doppelindex (hk statt m, pq statt n)

$$(42)\begin{cases} \alpha_{hk}^{(pq)}=\alpha_{pq}^{(hk)}=\int\limits_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}}\int\limits_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}}\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial^2\psi_{hk}}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2\psi_{pq}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi_{hk}}{\partial y^2}\frac{\partial^2\psi_{pq}}{\partial y^2}\\ +\mu\left(\frac{\partial^2\psi_{hk}}{\partial x^2}\frac{\partial^2\psi_{pq}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi_{pq}}{\partial x^2}\frac{\partial^2\psi_{hk}}{\partial y^2}\right)\\ +2(1-\mu)\frac{\partial^2\psi_{hk}}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2\psi_{pq}}{\partial x\partial y}\end{array}\right\}dx\,dy, \\ \beta_{hk}^{(pq)}=\beta_{(pq)}^{(hk)}=\int\limits_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}}\int\limits_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}}\psi_{hk}\psi_{pq}\,dx\,dy. \end{cases}$$

Bei Ausführung der Integration ergibt sich zunächst, daß alle β verschwinden, für welche der Index $pq \neq hk$ ist. Daher wird die Determinantengleichung einfacher

$$(41\text{a})\quad \begin{vmatrix} \alpha_{00}^{(00)} - \beta_{00}^{(00)}\lambda_s, & \alpha_{01}^{(00)}, & \alpha_{10}^{(00)} \; \ldots \; \alpha_{ss}^{(00)} \\ \alpha_{00}^{(01)}, & \alpha_{01}^{(01)} - \beta_{01}^{(01)}\lambda_s, & \alpha_{10}^{(01)} \; \ldots \; \alpha_{ss}^{(01)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{00}^{(ss)}, & \alpha_{01}^{(ss)}, & \alpha_{10}^{(ss)} \; \ldots \; \alpha_{ss}^{(ss)} - \beta_{ss}^{(ss)}\lambda_s \end{vmatrix} = 0.$$

Zur Berechnung dienen folgende Formeln

$$(43)\quad \begin{cases} \beta_{hk}^{(pq)} = 0, \quad \text{wenn } pq \neq hk \text{ ist.} \\ \beta_{hk}^{(hk)} = \int\limits_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \int\limits_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \psi_{hk}^2 \, dx\, dy = \int\limits_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \int\limits_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} u_h^2(x)\, v_k^2(y)\, dx\, dy = \frac{l^2}{4}. \end{cases}$$

$$(44)\quad \begin{cases} \alpha_{hk}^{(pq)} = \mu[\omega_{hp}\omega_{qk} + \omega_{ph}\omega_{kq}] + 2(1-\mu)\gamma_{hp}\gamma_{kq}, \\ \alpha_{hk}^{(hk)} = \dfrac{m_h^4 + m_k^4}{4\,l^2} + 2\mu\,\omega_{hh}\omega_{kk} + 2(1-\mu)\gamma_{hh}\gamma_{kk}, \end{cases}$$

wobei die Hilfsgrößen γ und ω bestimmt sind als

$$(45)\qquad \gamma_{hp} = \int\limits_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{\partial u_h}{\partial x}\,\frac{\partial u_p}{\partial x}\, dx, \qquad \omega_{hp} = \int\limits_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{\partial^2 u_h}{\partial x^2}\, u_p\, dx,$$

bezw. die gleichen Integrale mit v_h, v_q und y als Integrationsvariablen[1]). Je nachdem h und p (bezw. k und q) von gleicher Parität (d. h. beide zugleich gerade oder beide zugleich ungerade) sind oder von ungleicher Parität (d. h. eines gerade, das andere ungerade), erhält man

1) Die gleichen Rechnungen und Formeln gelten auch für rechteckige Platten mit den Kanten a (parallel x) und b (parallel y) statt der quadratischen Platte mit der Kante l. Nur sind in den Integralen mit x als Integrationsvariable die Grenzen $-\frac{a}{2}$ und $+\frac{a}{2}$, in denen mit y die Grenzen $-\frac{b}{2}$ und $+\frac{b}{2}$ einzusetzen, so daß $\gamma_{hp} \neq \gamma_{kq}$ und $\omega_{hp} \neq \omega_{kq}$ wird, auch wenn die Indizes $hp = kq$ sind, da h und p zu x, k und q zu y gehören. Insbesondere wird aber

(46)

$\gamma_{hp} = 0$, wenn h und p verschiedener Parität sind;

$$\gamma_{op} = \gamma_{po} = 0;$$

approx. $\gamma_{hp} = \sigma \dfrac{2 m_h m_p (m_h^3 - m_p^3)}{\frac{l}{2}(m_h^4 - m_p^4)}$, wenn h und $p > 2$;

$$\gamma_{hh} = \frac{m_h^2\left(\mathfrak{Cof}^2 \frac{m_h}{2} - \cos^2 \frac{m_h}{2}\right)}{2l\left(\mathfrak{Cof}^2 \frac{m_h}{2} + \cos^2 \frac{m_h}{2}\right)} + \frac{6 m_h \cos^2 \frac{m_h}{2}\, \mathfrak{Cof}^2 \frac{m_h}{2}\, \mathfrak{Tg} \frac{m_h}{2}}{l\left(\mathfrak{Cof}^2 \frac{m_h}{2} + \cos^2 \frac{m_h}{2}\right)},$$

wenn h gerade;

$$\gamma_{hh} = \frac{m_h^2\left(\mathfrak{Sin}^2 \frac{m_h}{2} + \sin^2 \frac{m_h}{2}\right)}{2l\left(\mathfrak{Sin}^2 \frac{m_h}{2} - \sin^2 \frac{m_h}{2}\right)} + \frac{6 m_h \sin^2 \frac{m_h}{2}\, \mathfrak{Sin}^2 \frac{m_h}{2}\, \mathfrak{Ctg} \frac{m_h}{2}}{l\left(\mathfrak{Sin}^2 \frac{m_h}{2} - \sin^2 \frac{m_h}{2}\right)},$$

wenn h ungerade;

$$\gamma_{00} = 0, \qquad \gamma_{11} = \frac{6}{l};$$

approx. $\gamma_{hh} = \dfrac{m_h^2}{2l} + \dfrac{3 m_h}{l}$, wenn $h > 2$.

Mit wenigstens 2% Genauigkeit gelten diese Formeln auch für $h = 2$, $p = 2$. Mit derselben Genauigkeit (2%) ist auch

(46a) $$\gamma_{1p} = \gamma_{p1} = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \frac{4\sqrt{3}}{l}.$$

Ferner ist

$$\omega_{0p} = \omega_{1p} = 0;$$

$\omega_{hp} = 0$, wenn h und p verschiedener Parität;

(43′) $$\beta_{hk}^{(hk)} = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} u_h^2 dx \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} v_k^2 dy = \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2}$$

(44′) $$\alpha_{hk}^{(hk)} = \frac{m_h^4}{2a^3} \cdot \frac{b}{2} + \frac{m_k^4}{2b^3} \frac{a}{2} + 2\mu\omega_{hh}\omega_{kk} + 2(1-\mu)\gamma_{hh}\gamma_{kk}.$$

$$\text{approx. } \omega_{hp} = \sigma \frac{4\,m_h^4 (m_h - m_p)}{l\,(m_h^4 - m_p^4)},$$

wenn h und p gleicher Parität und beide > 2 sind;

$$(47)\quad \omega_{hh} = -\frac{m_h^2\left(\mathfrak{Cof}^2\frac{m_h}{2} - \cos^2\frac{m_h}{2}\right)}{2\,l\left(\mathfrak{Cof}^2\frac{m_h}{2} + \cos^2\frac{m_h}{2}\right)} + \frac{2\,m_h \cos^2\frac{m_h}{2}\,\mathfrak{Cof}^2\frac{m_h}{2}\,\mathfrak{Tg}\frac{m_h}{2}}{l\left(\mathfrak{Cof}^2\frac{m_h}{2} + \cos^2\frac{m_h}{2}\right)},$$

wenn h gerade;

$$\omega_{hh} = -\frac{m_h^2\left(\mathfrak{Sin}^2\frac{m_h}{2} + \sin^2\frac{m_h}{2}\right)}{2\,l\left(\mathfrak{Sin}^2\frac{m_h}{2} - \sin^2\frac{m_h}{2}\right)} + \frac{2\,m_h \sin^2\frac{m_h}{2}\,\mathfrak{Sin}^2\frac{m_h}{2}\,\mathfrak{Ctg}\frac{m_h}{2}}{l\left(\mathfrak{Sin}^2\frac{m_h}{2} - \sin^2\frac{m_h}{2}\right)},$$

wenn h ungerade;

$$\omega_{00} = 0, \quad \omega_{11} = 0;$$

$$\text{approx. } \omega_{hh} = -\frac{m_h^2}{2\,l} + \frac{m_h}{l}, \text{ wenn } h > 2.$$

Mit wenigstens 2% Genauigkeit gilt

$$(47\text{a})\quad \begin{cases} \omega_{0p} = 0, \quad \omega_{h0} = (-1)^{\frac{h}{2}} \dfrac{2\,m_h}{l}, \text{ wenn } h \text{ gerade}, \\ \qquad\qquad \omega_{h0} = 0, \quad \text{wenn } h \text{ ungerade}, \\ \omega_{1p} = 0, \quad \omega_{h1} = (-1)^{\frac{h-1}{2}}\, 4\sqrt{3}\, \dfrac{m_h - 2}{2\,l}, \text{ wenn } h \text{ ungerade}, \\ \qquad\qquad \omega_{h1} = 0, \quad \text{wenn } h \text{ gerade}. \end{cases}$$

Der Koeffizient σ, der hier vorkommt, hat den Wert

$$(48)\quad \begin{cases} \sigma = (-1)^{\frac{h+p}{2}}, \text{ wenn } h \text{ und } p \text{ gerade, und beide } > 2, \\ \sigma = -(-1)^{\frac{h+p}{2}}, \text{ wenn } h \text{ und } p \text{ ungerade und beide } \gtreqless 3. \end{cases}$$

68. Berechnung der Frequenzparameter λ und Normalfunktion w^* für einfache und Doppeltöne. Für die zahlenmäßige Berechnung der λ_s stellt man am besten erst die Gleichungen (41) selbst auf, da sich dieselben meist vereinfachen, weil je nach den Symmetrieeigenschaften entweder $A_{hk} = A_{kh}$ oder $A_{hk} = -A_{kh}$

ist usw., so daß die Anzahl der Glieder dieser Gleichungen und damit auch der Determinante (41a) sich verringert. Ein Beispiel für den Fall in x und y ungerader, aber symmetrischer Schwingungen, zu denen z. B. auch der Grundton der Platte gehört, ist von Ritz ausführlich mitgeteilt. Die numerische Berechnung der Determinante wird dadurch erleichtert, daß die Größen $\alpha_{hk}^{(hk)}$, die in der Hauptdiagonale stehen, viel größer sind und mit h und k schneller wachsen als die anderen Größen $\alpha_{hk}^{(pq)}$.

Es ist hier gesetzt

$$(49)\quad \begin{aligned} w^* &= A_{11}u_1v_1 + A_{13}u_1v_3 + A_{31}u_3v_1 + A_{33}u_3v_3 + A_{15}u_1v_5 \\ &\quad + A_{51}u_5v_1 + A_{35}u_3v_5 + A_{53}u_5v_3 + A_{55}u_5v_5 \\ &= A_0u_1v_1 + A_1(u_1v_3 + u_3v_1) + A_2u_3v_3 + A_3(u_1v_5 + u_5v_1) \\ &\quad + A_4(u_3v_5 + u_5v_3) + A_5u_5v_5 , \end{aligned}$$

indem die Entwicklung bis zu Gliedern mit u_5 und v_5 fortgesetzt, die Beziehung $A_{hk} = A_{kh}$ benutzt ist, und zur Vereinfachung Koeffizienten A mit einfachem Index eingeführt sind. Setzt man $\beta_{hk}^{(hk)}\lambda = \bar{\lambda}$, wobei $\beta_{hk}^{(hk)} = \frac{l^2}{4}$ ist, so werden die zu lösenden Gleichungen hier, wenn die Poissonsche Elastizitätszahl $\mu = 0{,}225$ angenommen wird,

$$\begin{aligned} &(13{,}95 - \bar{\lambda})A_0 - 32{,}08A_1 + 18{,}60A_2 + 32{,}08A_3 - 37{,}20A_4 \\ &\qquad + 18{,}60A_5 = 0 \\ &- 16{,}04A_0 + (411{,}8 - \bar{\lambda})A_1 - 120{,}0A_2 - 133{,}6A_3 + 166{,}8A_4 \\ &\qquad + 140A_5 = 0 \\ &+ 18{,}60A_0 - 240A_1 + (1686 - \bar{\lambda})A_2 - 218{,}0A_3 - 1134A_4 \\ &\qquad + 330A_5 = 0 \\ &+ 16{,}04A_0 - 133{,}6A_1 + 109{,}0A_2 + (2945 - \bar{\lambda})A_3 - 424A_4 \\ &\qquad + 179A_5 = 0 \\ &- 18{,}60A_0 + 166{,}8A_1 - 567A_2 - 424A_3 + (6303 - \bar{\lambda})A_4 \\ &\qquad - 1437A_5 = 0 \\ &+ 18{,}60A_0 + 280A_1 + 330A_2 + 358A_3 - 2874A_4 \\ &\qquad + (13674 - \bar{\lambda})A_5 = 0 . \end{aligned}$$

Hierbei ist die halbe Quadratseite $\frac{l}{2}$ als Längeneinheit angenom-

men, also $\frac{l}{2} = 1$ gesetzt; die Größen $\bar{\lambda}$ entsprechen den Größen $\frac{l^2}{4}\lambda$ in der bisherigen Bezeichnung. Statt λ_{55} bezw. λ_5, durch welche Schreibweise der Grad der Annäherung an den wahren Wert des Frequenzparameters gleich mit angegeben wird, der durch die Zahl der Glieder in (49) bedingt ist, wird λ geschrieben.

Die erste Wurzel $\lambda^{(I)}$ gehört zum Grundton, die zweite $\lambda^{(II)}$ zum ersten Oberton mit gleichen Symmetrieeigenschaften usw. Die Werte $\bar{\lambda}$ bezw. λ, die sich hier ergeben, sind[1])

$$\lambda^{(I)} = 12{,}43\,\frac{4}{l^2};\quad \lambda^{(II)} = 378\,\frac{4}{l^2};\quad \lambda^{(III)} = 1554\,\frac{4}{l^2};\quad \lambda^{(IV)} = 2945\,\frac{4}{l^2};$$
$$\lambda^{(V)} = 6303\,\frac{4}{l^2};\quad \lambda^{(VI)} = 13670\,\frac{4}{l^2}.$$

Zu jedem dieser Werte von λ gehört ein System der Koeffizienten A; z. B. sind die Werte für den Grundton $\lambda = 12{,}43\,\frac{4}{l^2}$ folgende:

$$A_1 = 0{,}0394\,A_0;\quad A_2 = -0{,}0040\,A_0;\quad A_3 = -0{,}0034\,A_0;$$
$$A_4 = 0{,}0011\,A_0;\quad A_5 = -0{,}0019\,A_0.$$

Das Glied mit A_0 überwiegt also bei weitem, so daß die dem Grundton entsprechende Bewegung mit großer Annäherung durch die einfache Funktion dargestellt werden kann, [vgl. (56a) in Nr. **52**]

$$w^* = A_0 u_1 v_1 = A'_0 xy. \tag{50}$$

Für den 1. Oberton mit gleicher Symmetrie, $\lambda^{(II)} = 378\,\frac{4}{l^2}$, wird A_1 der überwiegende Koeffizient, so daß in erster Näherung die Bewegung durch die (genäherte) Normalfunktion

$$w^* = A_1(u_1 v_3 + u_3 v_1) = A_1(u_1(x)v_3(y) + u_3(x)v_1(y)) \tag{51}$$

dargestellt wird. Die anderen Koeffizienten A_0, A_2 ... sind nur Bruchteile von A_1. In allen diesen Ausdrücken ist natürlich einer der Koeffizienten A von willkürlichem Absolutwerte, dessen Größe durch die vorhandene Energie des Systems bestimmt wird. Für

1) Wenn μ von dem Werte 0,225 abweicht, so ändern sich auch die angegebenen Werte der λ. Für einige der Hauptschwingungen hat Ritz die Änderungen mitangegeben, die entstehen, wenn μ den Wert $0{,}225 + \delta\mu$ annimmt; $\delta\mu$ muß klein sein gegen 0,225.

weitere Einzelheiten muß auf die Originalarbeit von Ritz verwiesen werden.

Ähnliche Entwicklungen lassen sich für Schwingungen mit anderer Symmetrie ausführen. Sind z. B. die Schwingungen ungerade und antisymmetrisch in Bezug auf x und y, so werden in dem Ausdruck (40) von Nr. 67 die Koeffizienten $A_{hh} = 0$ und $A_{kh} = -A_{hk}$; man erhält

$$w^* = A_1'(u_1 v_3 - u_3 v_1) + A_3'(u_1 v_5 - u_5 v_1) + A_4'(u_3 v_5 - u_5 v_3).$$

Vernachlässigt man wieder die kleineren Koeffizienten A und nimmt zur Charakterisierung der Schwingung nur das Hauptglied, so ergeben sich für die λ der Schwingungen mit den Hauptgliedern $A_1'(u_1 v_3 - u_3 v_1)$, $A_3'(u_1 v_5 - u_5 v_1)$, $A_5'(u_3 v_5 - u_5 v_3)$ andere Werte als für die Schwingungen mit den Hauptgliedern $A_1(u_1 v_3 + u_3 v_1)$, $A_3(u_1 v_5 + u_5 v_1)$ und $A_5(u_3 v_5 + u_5 v_3)$. Diese Töne sind daher keine Doppeltöne. Das gilt allgemein für Schwingungen, deren Indizes gleiche Parität haben. Anders ist es bei Schwingungen, deren Symmetrie die Einführung von Gliedern mit Indizes verschiedener Parität erfordert. Z. B. wird für eine in x ungerade, in y gerade Schwingung der Ansatz

$$(52)\quad \begin{cases} w^*_{(xy)} = A_{10} u_1 v_0 + A_{12} u_1 v_2 + A_{14} u_1 v_4 + A_{30} u_3 v_0 \\ \qquad + A_{32} u_3 v_2 + A_{34} u_3 v_4 + A_{50} u_5 v_0 + A_{52} u_5 v_2 + A_{54} u_5 v_4 ; \end{cases}$$

mit den nach dem Früheren zu berechnenden Zahlenwerten der Koeffizienten geht er über in

$$(52\,\mathrm{a})\quad \begin{cases} w^{(xy)} = A_{12}[u_1 v_2 + 0{,}0260\, u_1 v_4 - 0{,}0682\, u_3 v_0 \\ \qquad + 0{,}0760\, u_3 v_2 - 0{,}0027\, u_3 v_4 + 0{,}0073\, u_5 v_0 \\ \qquad - 0{,}0112\, u_5 v_2 + 0{,}0030\, u_5 v_4], \end{cases}$$

wobei

$$\lambda = 80{,}8 \cdot \frac{4}{l^2}\cdot$$

Der Koeffizient A_{10} des ersten Gliedes ist gleich Null gesetzt, weil dieses Glied, nämlich Konst. x, nur eine Drehung der Platte im ganzen um die y-Achse darstellt, also die Form der Platte nicht beeinflußt.

Genau dieselbe Entwicklung läßt sich aber auch ausführen, wenn man x mit y vertauscht, d. h. wenn man die Platte um 90^0 dreht. Die Schwingung ist alsdann in x gerade, in y ungerade. Man erhält natürlich dieselben Zahlenwerte an entsprechenden

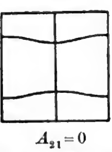
Stellen, insbesondere auch den gleichen Wert von λ, so daß man einen „Doppelton" hat. Die Normalfunktion ist

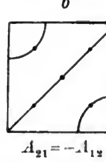
$$(53)\quad \begin{cases} w^{(y,x)} = A_{01}u_0v_1 + A_{21}u_2v_1 + A_{41}u_4v_1 + A_{03}u_0v_3 \\ \quad + A_{23}u_2v_3 + A_{43}u_4v_3 + A_{05}u_0v_5 + A_{25}u_2v_5 + A_{45}u_4v_5 \\ \quad = A_{21}[u_2v_1 + 0{,}0260\,u_4v_1 - 0{,}0682\,u_0v_3 + 0{,}0760\,u_2v_3 \\ \quad - 0{,}0027\,u_4v_3 + 0{,}0073\,u_0v_5 - 0{,}0112\,u_2v_5 \\ \quad + 0{,}0030\,u_4v_5]. \end{cases}$$

Genau wie bei den Doppeltönen der Membranen können die beiden Schwingungen $w(x,y)$ und $w(y,x)$ gleichzeitig bestehen, sich übereinanderlagernd und zwar mit beliebiger Phasendifferenz, was durch Vorzeichen und Größenverhältnis ihrer Amplituden $A_{21}:A_{12}$ zum Ausdruck kommt. Die allgemeine Schwingung mit der Frequenz, für welche $\lambda = 80{,}8 \cdot \frac{4}{l^2}$ ist, nämlich

$$(54)\qquad w^* = A_{12}\,w^{(x,y)} + A_{21}\,w^{(y,x)},$$

kann dementsprechend unendlich viele verschiedene Klangfiguren besitzen, von denen drei charakteristische nach W. Ritz in Fig. 47 dargestellt sind, die erste für $A_{21} = 0$, die zweite für $A_{21} = -A_{12}$, die dritte für $A_{12} = 0$. Die „Pole", d. h. diejenigen festen Punkte, durch welche die Knotenlinien stets hindurchgehen, sind darin angedeutet.





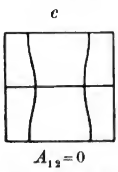


Fig. 47. Knotenlinien (Schwingungsfiguren) der quadratischen Platte mit freien Rändern für einen „Doppelton".

Die zahlreichen bei den verschiedenen Funktionen w^* möglichen Klangfiguren sind mit den zugehörigen Funktionen w^* in der Ritzschen Abhandlung ausführlich zusammengestellt, müssen aber hier wegen Raummangel größtenteils weggelassen werden. Zum Teil sind sie den Klangfiguren der Membranen sehr ähnlich. Nur ein kleiner Teil der Figuren, und zwar für jeden Schwingungstyp eine, sind in den Figuren 48 bis 53 hier dargestellt und die Normalfunktionen w^* angegeben. Die Hauptglieder der Entwick-

lungen sind fett gedruckt, die Amplituden derselben gleich eins gesetzt.

69. Zusammenstellung einiger Werte λ und w^* nebst den Klangfiguren. A. Schwingungen in x und y ungerade und symmetrisch.

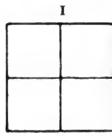


Fig. 48.

I. Grundton $\lambda = 12{,}43 \frac{4}{l^2}$.[1] (Fig. 48.)

$$w = \mathbf{u_1 v_1} + 0{,}0394(u_1 v_3 + u_3 v_1) - 0{,}0040\, u_3 v_3 - 0{,}0034(u_1 v_5 + u_5 v_1) + 0{,}0011(u_3 v_5 + u_5 v_3) - 0{,}0019\, u_5 v_5 .$$

II. $\lambda = 378 \frac{4}{l^2}$. (Fig. 49.)

$$w = -0{,}075\, u_1 v_1 + (\mathbf{u_1 v_3 + u_3 v_1}) + 0{,}173\, u_3 v_3 + 0{,}045(u_1 v_5 + u_5 v_1) - 0{,}015(u_3 v_5 + u_5 v_3) - 0{,}029\, u_5 v_5 .$$

Fig. 49.

B. Schwingungen in x und y ungerade und antisymmetrisch.

I'. $\lambda = 316{,}1 \frac{4}{l^2}$. (Fig. 50.)

$$w = \mathbf{u_1 v_3 - u_3 v_1} + 0{,}0002(u_1 v_5 - u_5 v_1) + 0{,}0033(u_3 v_5 - u_5 v_3).$$

Fig. 50.

C. Schwingungen in x und y gerade und symmetrisch. Diese Schwingungen sind experimentell besonders leicht und zahlreich zu erzeugen.

I''. $\lambda = 35{,}73 \frac{4}{l^2}$. (Fig. 51.)

$$w = \mathbf{u_0 v_2 + u_2 v_0} - 0{,}0238\, u_2 v_2 + 0{,}0130(u_0 v_4 + u_4 v_0) + 0{,}0026(u_2 v_4 + u_4 v_2) + 0{,}0016\, u_4 v_4 .$$

Fig. 51.

1) Ritz gibt als Zusatzglied $-\varepsilon \cdot \delta\mu$ noch die Änderung an, welche λ erfährt, wenn man statt $\mu = 0{,}225$ den Wert $0{,}225 + \delta\mu$ für die Poissonsche Zahl setzt.

II″. $\lambda = 266{,}0 \frac{4}{l^2}$. (Fig. 52.)

$$w = 0{,}0122(u_0 v_2 + u_2 v_0) + u_2 v_2 - 0{,}0188(u_0 v_4 + u_4 v_0) + 0{,}0880(u_2 v_4 + u_4 v_2) - 0{,}0044 u_4 v_4 .$$

II″

Fig. 52.

D. Schwingungen in x und y gerade und antisymmetrisch.

I‴

Fig. 53.

I‴. $\lambda = 26{,}40 \frac{4}{l^2}$. (Fig. 53.)

$$w = u_0 v_2 - u_2 v_0 - 0{,}0129(u_0 v_4 - u_4 v_0) - 0{,}0045(u_2 v_4 - u_4 v_2).$$

E. Doppeltöne.

Die Indizes von u und v sind von verschiedener Parität.

Für den tiefsten Ton mit $\lambda = 80{,}8$ ist die Normalfunktion in (54) [bezw. (52) und (53)] schon angegeben, ebenso in den Figuren 47a—c drei verschiedene Formen der unendlich vielen möglichen Klangfiguren, die zu diesem Ton gehören.

Die Schwingungsfrequenzen n sind nach Gl. (31′) in Nr. 65 aus den Werten von λ zu berechnen. Sie sind der halben Plattendicke D und der Quadratwurzel aus λ proportional, womit ihre Abhängigkeit von der geometrischen Gestalt der Platte erledigt ist; der noch verbleibende Faktor gibt die Abhängigkeit von den Materialkonstanten an.

IV. Abschnitt.

Vervollkommnete Theorie für offene gasgefüllte Hohlräume.

8. Kapitel.

Helmholtzsche Theorie der offenen Pfeifen und kubischen Resonatoren.

70. Mathematische Hilfsmittel. Greenscher Integralsatz und Kirchhoff-Huygenssches Prinzip. Helmholtz[1]) hat die Theorie der teilweise von festen Wänden umgebenen Gasmassen (Pfeifen und Resonatoren) in viel allgemeinerer Weise behandelt, als es die elementare Theorie tut. Der Grundgedanke ist der: Man beschränkt die Betrachtung nicht auf die eingeschlossene Gasmasse, die in der elementaren Theorie wie ein abgeschlossenes, mit der Umgebung nicht in Energieaustausch stehendes System behandelt wird, sondern berücksichtigt, daß durch die Öffnungen Energieaustausch stattfindet, d. h. daß Wellen hinein- oder hinauslaufen. Man nimmt also die Umgebung, die Außenatmosphäre, zum System hinzu. Es handelt sich nun darum, solche Funktionen φ als Geschwindigkeitspotential ausfindig zu machen, die der allgemeinen Gleichung (33) in Nr. **39** an allen Punkten des ganzen Raumes genügen, und die außerdem die Grenzbedingungen an den festen Wänden und in unendlicher Entfernung befriedigen. Die Funktion φ kann in den verschiedenen Teilen des Raumes ganz verschiedene analytische Form haben; diese Formen

1) H. v. Helmholtz, Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden (Crelles Journal f. d. reine u. angew. Mathematik. Bd. **57.** S. 1—72. 1860). — Abgedruckt in Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften Bd. 80 (Leipzig **1896**). In diesem Abdruck sind die Druckfehler des Originals korrigiert; außerdem enthält er Anmerkungen des Herausgebers, die das Verständnis erleichtern.

müssen aber in den Grenzgebieten stetig ineinander übergehen, da φ im ganzen Raum stetig sein muß, und auch die Differentialquotienten oder Ableitungen von φ müssen stetig sein.

Für gewisse einfache Fälle von Wellen- bezw. Schwingungsbewegung, z. B. ebene Wellen und Kugelwellen, sowohl fortlaufende wie auch stehende, lassen sich nun Lösungen der Gl. (33), wie im vorhergehenden (vgl. besonders Nr. **41**) gezeigt wurde, auffinden, d. h. man kann für solche Bewegungen das Geschwindigkeitspotential aufstellen. Wenn man nun die Gestalt der Begrenzungsflächen der Gasmasse, der festen Wände, passend wählt, so kann man es erreichen, daß in gewissen Teilen des ganzen zu betrachtenden Raumes derartige einfache Bewegungen mit bekannten Potentialfunktionen φ mehr oder weniger genau verwirklicht sind, z. B. in einem Teil ebene, in einem anderen Teil Kugelwellen; dabei ist es zulässig, daß die eine Art, etwa die ebenen, stehende, die anderen fortlaufende Wellen sind. Stehende Wellen werden immer dort anzunehmen sein, wo der Zustand bereits stationär geworden ist. Für die zwischen solchen bekannten Gebieten liegenden Gebiete mit vorläufig unbekannter Form des Geschwindigkeitspotentials läßt sich nun mit Rücksicht auf die geforderte Stetigkeit von φ und seinen Ableitungen mittels gewisser allgemeiner Sätze der Potentialtheorie die Form und der Wert des Potentials aus den Werten in jenen Gebieten ableiten. Dazu dient besonders der sogenannte Greensche Satz oder spezieller das Huygenssche Prinzip der Elementarwellen in der mathematischen Fassung, die G. Kirchhoff für dasselbe aus dem Greenschen Satze abgeleitet hat.

Der Greensche Satz bietet ein Mittel, um gewisse Integralausdrücke in andere, passendere Formen umzugestalten. Es seien Φ und Ψ zwei beliebige skalare Funktionen des Ortes und der Zeit, die in dem in Betracht kommenden Raum mit ihren Differentialquotienten im allgemeinen endlich und stetig sind. Nur in einzelnen Punkten oder Flächen dürfen sie selbst und ihre Ableitungen unstetig oder unendlich werden. Bedeutet $d\tau$ ein Raumelement, $d\sigma$ ein Oberflächenelement der den Raum umhüllenden Fläche, n die nach dem Inneren des Raumes gerichtete Normale des Oberflächenelementes $d\sigma$, und ist $\Delta\Phi$ der zweite Lamésche Differentialparameter von Φ nämlich $\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$, so lautet der Greensche Satz:

$$(1)\qquad \int\limits_{(\tau)} (\Psi \Delta \Phi - \Phi \Delta \Psi) d\tau = \int\limits_{(\sigma)} \left(\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) d\sigma$$

oder mit anderer Verteilung der Glieder

$$(1\text{a})\qquad \int\limits_{(\sigma)} \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\sigma + \int\limits_{(\tau)} \Psi \Delta \Phi d\tau = \int\limits_{(\sigma)} \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} d\sigma + \int\limits_{(\tau)} \Phi \Delta \Psi d\tau.$$

Aus dieser Form des Satzes lassen sich noch andere, in besonderen Fällen brauchbare ableiten, z. B. indem man in (1a) beiderseits $k^2 \int\limits_{(\tau)} \Phi \Psi d\tau$ addiert, die später zu benutzende Form

$$(2)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\int\limits_{(\sigma)} \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\sigma + \int\limits_{(\tau)} \Psi (\Delta \Phi + k^2 \Phi) d\tau \\ &\qquad = \int\limits_{(\sigma)} \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} d\sigma + \int\limits_{(\tau)} \Phi (\Delta \Psi + k^2 \Psi) d\tau. \end{aligned} \right.$$

Darin bedeutet k eine Konstante. Sind z. B. Φ und Ψ Funktionen, welche der Differentialgleichung der „Normalfunktionen" (37) in Nr. 40

$$(3)\qquad \Delta \Phi + k^2 \Phi = 0, \quad \Delta \Psi + k^2 \Psi = 0,$$

gehorchen, so vereinfacht sich die Gl. (2) durch Fortfall der zweiten Glieder beiderseits ganz erheblich. Dasselbe gilt für die Gl. (1a), wenn Φ und Ψ der Laplaceschen Gleichung $\Delta \Phi = 0$ des gewöhnlichen Potentials genügen. Man erhält in diesen Fällen die Gleichung

$$(2\text{a})\qquad \int\limits_{(\sigma)} \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\sigma - \int\limits_{(\sigma)} \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} d\sigma = 0.$$

Mittels des Greenschen Satzes hat, wie schon bemerkt, Kirchhoff das Huygenssche Prinzip der Elementarwellen mathematisch streng formuliert. Das Prinzip besagt: wenn man in einem von Wellen erfüllten Raum den Schwingungszustand auf irgendeiner geschlossenen Fläche kennt, die man ganz beliebig konstruieren kann, so lassen sich daraus die Vorgänge an jedem Punkt dieses Raumes ableiten. Der physikalische Grund dafür ist der, daß jeder Punkt dieser Fläche — überhaupt jeder Punkt des von den Wellen durchsetzten Raumes — als Ausgangspunkt einer

Kugelwelle gelten kann, die von ihm als Erregungsmittelpunkt ausgeht. Die Summe der gleichzeitigen Wirkungen dieser einzelnen Elementarwellen an irgendeinem Punkt ergibt den jeweiligen Bewegungszustand daselbst. Auf das Problem der offenen Pfeife angewandt, heißt das: Wenn man den Schwingungszustand in irgendwelchen Teilen des Raumes kennt, z. B. im Innern der Pfeife und weit entfernt im Außenraum, so kann man für das zwischenliegende Gebiet die Bewegung daraus ableiten. Es ist jedoch bequemer, dazu direkt den Greenschen Satz zu benutzen, als den in seiner mathematischen Fassung etwas umständlichen Kirchhoff-Huygensschen Satz.

71. Gestalt der Röhre im allgemeinen. Form des Geschwindigkeitspotentials. Um danach die Wellenbewegung in einer offenen Röhre zu behandeln, macht Helmholtz folgende Annahmen über die Form der Röhre:

1. Die Form der Röhre sei im allgemeinen zylindrisch.

2. Nur auf einer kleinen, d. h. gegen die Wellenlänge des Tones kleinen Strecke von der Mündung aus gerechnet, darf die Gestalt von der zylindrischen abweichen; es wird also eine trompetenartige, trichterförmig erweiterte oder auch eine nach der Mündung zu verengte Form mit eingeschlossen.

3. Die Dimensionen der Öffnung sollen ebenso wie die Länge des nichtzylindrischen Teiles der Röhre klein sein gegen die Wellenlänge.

4. Die Mündung der Röhre liege in einer festen ebenen Wand, die sich nach allen Seiten unendlich weit erstreckt; es wird also praktisch eine Pfeife mit breitem Mündungsflansch betrachtet.

Diese Ebene sei die yz-Ebene, die Röhre liege auf Seite der negativen x, die Röhrenachse sei negative x-Achse. Der Koordinatenanfangspunkt liegt also in der Mitte der Röhrenmündung. Auf Seite der positiven x sei der Luftraum unbegrenzt. Ist k eine endliche Konstante, so wird nach Annahme 3 ky und kz klein gegen 1, wenn y und z Koordinaten eines Punktes der Röhrenmündung sind, und kx wird klein gegen 1, wenn x einem Punkte des nichtzylindrischen Teiles der Röhrenwand angehört (vgl. Fig. 54).

Über die Natur der Bewegung werden folgende Annahmen zugrunde gelegt.

5. Im Innern der Röhre ist irgendwo ein Abschnitt, in dem eine ebene stehende Wellenbewegung vorhanden ist, gerade so

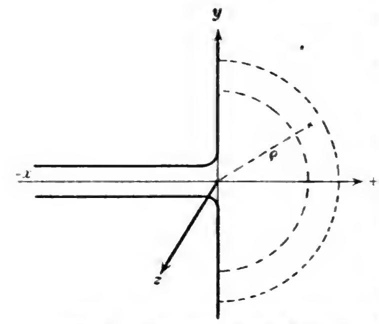


Fig. 54. Längsschnitt durch die Achse der Röhre; die stark ausgezogenen Linien stellen die Röhrenwand und den Seitenflansch (yz-Ebene) dar.

wie es in der elementaren Theorie für die ganze Röhre angenommen wird.

6. Auf Seite der positiven x denke man sich zwei Halbkugelflächen von sehr großem Radius konstruiert, deren Mittelpunkt der Koordinatenursprung ist. In dem Gebiet zwischen beiden sollen nach außen fortlaufende Halbkugelwellen vorhanden sein. Jenseits der äußeren dieser beiden Halbkugeln kann noch ein Gebiet liegen, wo die Bewegung erst beginnt, das also noch nicht von Wellen durchzogen ist.

7. Zwischen der Region der ebenen Wellen in der Röhre und der Region der Halbkugelwellen im Gebiet 6 soll sich eine stationäre stehende Wellenbewegung ausgebildet haben.

Das Geschwindigkeitspotential hat somit für diese drei verschiedenen Gebiete folgende verschiedene Formen.

Im Inneren der Röhre (Gebiet 5)

$$(4)\qquad \begin{cases} \Psi = \left(\frac{A}{k}\sin kx + B\cos kx\right)\cos 2\pi N t \\ \qquad\qquad + \left(\frac{\mathfrak{A}}{k}\sin kx + \mathfrak{B}\cos kx\right)\sin 2\pi N t. \end{cases}$$

A, B, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ sind vier Integrationskonstanten, die passend bestimmt werden müssen. Diese Form, die allgemeinste Form des Geschwindigkeitspotentials für stehende ebene Wellen ergibt sich als Lösung der Gl. (3) in Nr. 70, wenn man Ψ in bekannter Weise in ein Produkt $\Psi^{(t)}\,\Psi^{(x)}$ zerspaltet. Für $\Psi^{(x)}$ muß dann die Differentialgleichung der Normalfunktionen ebener Schwingungen gelten

$$(4')\qquad \frac{d^2\Psi^{(x)}}{dx^2} + k^2\Psi^{(x)} = 0, \qquad \left(k = \frac{n}{c} = \frac{2\pi N}{c}\right)$$

die ein Spezialfall von Gl. (3) ist, und deren allgemeine Lösung $\Psi^{(x)}$ eben die Form der beiden Klammergrößen in (4) hat; $\Psi^{(t)}$ kann gleich $\sin 2\pi N t$ und gleich $\cos 2\pi N t$ sein, im allgemeinsten

Falle also gleich der Summe beider Funktionen, jede mit einer von t unabhängigen Normalfunktion $\Psi^{(x)}$ multipliziert, wodurch die Form der Gl. (4) herauskommt. Die vier Konstanten dieser Gleichung können auf drei verringert werden, indem man den Anfangspunkt der Zeit passend wählt. Wenn man nämlich $t = t' + t_0$ setzt, die trigonometrischen Funktionen der Winkelsummen auflöst und alle Glieder wieder zu zwei Gliedern mit den Faktoren $\cos 2\pi N t'$ und $\sin 2\pi N t'$ vereinigt, so kann man durch geeignete Wahl des willkürlichen t_0 bewirken, daß im Faktor von $\sin 2\pi N t'$ ein Glied mit $\sin kx$ nicht mehr vorkommt. Schreibt man nun wieder t statt t', so hat das Geschwindigkeitspotential die einfachere Form[1])

$$\text{(4a)} \qquad \Psi = \left(\frac{A}{k}\sin kx + B\cos kx\right)\cos 2\pi N t + \mathfrak{B}\cos kx \sin 2\pi N t.$$

Zwischen den beiden Halbkugelflächen im Außenraume (Gebiet 6) sind nach außen fortschreitende Sinuswellen vorhanden, also hat Ψ daselbst die Form

$$\text{(5)} \qquad \Psi = \frac{M}{\varrho}\cos(k\varrho - 2\pi N t) - \frac{M_1}{\varrho}\sin(k\varrho - 2\pi N t).$$

Das ist dieselbe Form wie Gl. (45) in Nr. 41, nur ist k statt $\frac{2\pi}{\lambda}$, $2\pi N$ statt $\frac{2\pi c}{\lambda}$, M statt A'', $-M_1$ statt A', ϱ statt r gesetzt; ϱ ist der Radiusvektor vom Koordinatenursprung bis zum Aufpunkt im Gebiet 6. Die Größen M und M_1 sind unabhängig vom Betrage des Radiusvektors ϱ, aber möglicherweise abhängig von seiner Richtung, d. h. von den Winkeln, die ϱ mit den Koordinatenachsen bildet.[2])

1) Helmholtz nennt die sekundliche Schwingungszahl n, wofür hier N gesetzt ist, um Übereinstimmung mit unserer sonstigen Bezeichnung in diesem Buche zu bewahren und um Verwechselungen mit der Bezeichnung n als Richtung der Wandnormale zu vermeiden. Hier bedeutet c die Schallgeschwindigkeit, n sonst die Kreisfrequenz.

2) Die Annahme, daß M und M_1 von den Winkeln ϑ und ω (vgl. Nr. 41) abhängen, ist für eine Kugelwelle, die von einem Erregungspunkt ausgeht, natürlich nicht zulässig; denn in der Ableitung des Potentials der Kugelwellen wird ja gerade die Unabhängigkeit aller Größen von der Richtung, und Abhängigkeit nur vom absoluten Betrage des Radiusvektors r vorausgesetzt. Sind aber mehrere Erregungspunkte vorhanden, die jeder eine Kugelwelle von der Form der Gl. (45) in Nr. 41 und von gleicher Frequenz N aussenden, so erhält man

Im Gebiet 7 endlich, wo stehende Wellen angenommen werden, hat Ψ die Form

(6) $$\Psi = \Psi^* \cos 2\pi N t + \Psi^{**} \sin 2\pi N t,$$

wo Ψ^* und Ψ^{**} unabhängig von t, aber abhängig von den Koordinaten sind, und in diesem Gebiet der Gleichung der Normalfunktionen [Gl. (3) in Nr. 70] genügen; übrigens wird diese Gleichung (3) von allen drei Werten des Potentials Ψ (4), (5) und (6) erfüllt, von (5) allerdings nur, wenn M und M_1 konstant und nicht von der Richtung des Radiusvektor abhängig sind.

Zu der Bedingung (3) kommt noch die Grenzbedingung, welche ausdrückt, daß an den festen Wänden die Luftteilchen sich nicht senkrecht zur Wand bewegen können, nämlich

(7) $$\frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0$$

an allen festen Wänden, wobei n die nach dem Inneren des Luftraumes gerichtete Wandnormale sein soll.

Für die in der Anmerkung auf voriger Seite besprochene Umformung der Potentialsumme in die Form (5) ist übrigens Voraussetzung, daß alle Erregungspunkte im Endlichen liegen. Sind sie also auf irgendwelchen Flächen angeordnet, so dürfen sich diese Flächen nicht ins Unendliche erstrecken. Die Erregungspunkte

---

das Gesamtpotential Ψ als Summe der Teilpotentiale der einzelnen Wellen

$$\Psi = \sum \frac{A_a'}{r_a} \sin \frac{2\pi}{\lambda}(r_a - ct) + \frac{A_a''}{r_a} \cos \frac{2\pi}{\lambda}(r_a - ct)$$

$$= \sum \frac{A_a'}{r_a} \sin (k r_a - 2\pi N t) + \frac{A_a''}{r_a} \cos (k r_a - 2\pi N t),$$

wobei die r_a die Entfernungen des Aufpunktes von den einzelnen Erregungspunkten bedeuten. Liegt der Aufpunkt in sehr großer Entfernung von allen Erregungspunkten, so daß alle r_a sehr groß werden, so läßt sich diese Summe näherungsweise in die Form der Gl. (5) bringen, wobei nun ϱ die Entfernung des Aufpunktes vom Koordinatenursprung ist, und M und M_1 von der Richtung von ϱ abhängen. Statt dessen läßt sich übrigens auch schreiben

$$\Psi = \frac{\mathfrak{A}}{\varrho} \cos (k\varrho - 2\pi N t + \mathfrak{c}) \text{ für große } \varrho,$$

wobei $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{c}$ Funktionen der Winkel ϑ und ω sind.

können auch fiktiv sein; z. B. können als (fiktive) Erregungspunkte, von denen man sich Kugelwellen ausgehend denkt, die Spiegelbilder der wirklichen Erregungspunkte in bezug auf eine feste Wand in Betracht kommen. Denn die an der Wand reflektierten Wellen der wirklichen Erregungspunkte scheinen von den hinter der Wand gelegenen Spiegelbildern jener Punkte herzukommen. Beide Arten von Erregungspunkten zusammen, die wirklichen und ihre Spiegelbilder als fiktive, ergeben durch Übereinanderlagerung der von ihnen ausgesandten Wellen einen Bewegungszustand, bei dem dauernd an der als Spiegel dienenden festen Wand die Bedingung $\frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0$ erfüllt ist.

Im allgemeinen müssen also, damit jene Umformung gilt, auch die festen Begrenzungswände im Endlichen liegen und dürfen nicht unendlich ausgedehnt sein. Der einzige Fall, wo dies dennoch statthaft ist, ist der Fall einer unendlich ausgedehnten Ebene, für welche $x = 0$ ist, die also nach den über Form und Lage der Röhre gemachten Annahmen einen unendlich ausgedehnten Seitenflansch an der Röhrenmündung darstellt. Da die Lösung des Problems eine feste Begrenzung des Raumes fordert, in dem die Wellen verlaufen, und die eben geschilderte Begrenzung die einzige ist, welche die einfache Form (5) des Geschwindigkeitspotentials für sehr ferne Punkte gewährleistet, hat Helmholtz die angegebene Röhrenform mit Flansch gewählt.

72. Anwendung des Greenschen Satzes auf das Potential in den verschiedenen Teilen des Raumes. Die Behandlung des Problems, wegen deren Einzelheiten auf die Helmholtzsche Originalarbeit, am besten in der Ausgabe von Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften, verwiesen werden muß, ist nun folgende: Es werden aus dem Gesamtraum, wie im vorhergehenden angedeutet wurde, einzelne passend gewählte Gebiete herausgeschnitten, die teils von festen Wänden, teils von nur gedachten Grenzflächen gegen die anderen Teile abgegrenzt sind. In jedem dieser Gebiete wird der Greensche Satz (1) bezw. (2) oder das aus ihm abgeleitete Kirchhoff-Huygenssche Prinzip auf das Geschwindigkeitspotential Ψ angewandt, das für eine der beiden Funktionen Φ oder Ψ in diese Formeln eintritt, während für die zweite Funktion jedesmal eine geeignete, im übrigen beliebig wählbare, andere Funktion gesetzt wird.

I. Innenraum der Röhre von der Ebene der Mündung ($x = 0$)

bis zu einer damit parallelen Ebene, welche in der Region der ebenen Wellen liegt. Es wird

$$(8) \qquad \Psi = \Psi, \quad \Phi = \cos kx$$

gesetzt, welche Funktionen beide der Gleichung (3) in Nr. 70 genügen. Also gilt hier der Greensche Satz in der Form (2a) von Nr. 70.

Nun ist $\frac{\partial \Psi}{\partial n}$ nur an der Mündung und in dem unten gelegenen Querschnitt der Röhre von Null verschieden, dort ist es gleich $-\frac{\partial \Psi}{\partial x}$, hier gleich $+\frac{\partial \Psi}{\partial x}$, denn die Normalenrichtung ist dort $-x$, hier $+x$. An dem übrigen Teil der Oberfläche des betrachteten Raumes, die von festen Wänden gebildet wird, ist $\frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0$. Also ergibt sich durch partielle Integration über die ganze Oberfläche σ[1]) aus (2a)

$$(9) \quad \int_{(\sigma)} \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} d\sigma = \int \cos kx \frac{\partial \Psi}{\partial n} d\sigma$$
$$= -\cos 2\pi Nt \int \frac{\partial \overline{\Psi^*}}{\partial x} d\sigma - \sin 2\pi Nt \int \frac{\partial \overline{\Psi^{**}}}{\partial x} d\sigma$$
$$+ Q(A \cos kx - Bk \sin kx) \cos kx \cos 2\pi Nt$$
$$- Q\mathfrak{B}k \sin kx \cos kx \sin 2\pi Nt.$$

Durch den darübergesetzten Horizontalstrich (z. B. $\overline{\Psi^*}$ und $\frac{\partial \overline{\Psi^*}}{\partial x}$) sollen die Werte bezeichnet werden, die in der Röhrenmündung gelten. Es sind offenbar die Randwerte des betreffenden

1) Im unteren Querschnitt hat die zu integrierende Funktion, da sie nur von x, nicht auch von y und z abhängt, für alle Elemente $d\sigma$ denselben Wert, also wird dort

$$\int \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial x} d\sigma = \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial x} \int d\sigma = \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial x} Q,$$

wenn Q die Größe des Querschnitts ist. Für Ψ ist dabei der Ausdruck (4a), für Φ $\cos kx$ zu setzen. An der Mündung ist $x = 0$, also $\Phi = 1$, $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$, und für Ψ ist der Ausdruck (6) zu setzen, wodurch die Werte $\overline{\Psi^*}$ und $\overline{\Psi^{**}}$ hineinkommen, die Funktionen von y und z sind.

Gebietes an der nur gedachten Trennungsfläche gegen das benachbarte. Gebiet.

Der Quotient $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \cos kx}{\partial n}$ ist nur am zylindrischen Teil der Röhrenwand und in der Öffnung gleich Null. In dem inneren Querschnitt hat er den Wert $-k \sin kx$, denn n ist dort mit $+x$ identisch; und an dem nichtzylindrischen Teil der Röhrenwand ist

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\cos\beta = -k \sin kx \cos\beta,$$

wenn mit β der Winkel bezeichnet wird, den die nach innen gerichtete Normale n mit der $+x$-Richtung bildet. Vgl. Fig. 55a. Also wird

$$(10)\quad \int\limits_{(\sigma)} \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\sigma = -Q(A \sin kx + kB \cos kx) \sin kx \cos 2\pi Nt$$
$$- Qk\mathfrak{B} \cos kx \sin kx \sin 2\pi Nt$$
$$- k \cos 2\pi Nt \int \Psi^* \sin kx \cos\beta\, d\sigma$$
$$- k \sin 2\pi Nt \int \Psi^{**} \sin kx \cos\beta\, d\sigma.$$

Führt man diese beiden Integrale (9) und (10) in die Gl. (2a), den vereinfachten Greenschen Satz, ein, faßt die Glieder mit $\sin 2\pi Nt$ und ebenso die mit $\cos 2\pi Nt$ zusammen und setzt die Koeffizienten von $\sin 2\pi Nt$ nnd $\cos 2\pi Nt$ einzeln gleich Null[1]), so erhält man folgende zwei Bedingungsgleichungen

$$(11)\qquad AQ = \int\limits_{(\sigma)} \frac{\partial \overline{\Psi^*}}{\partial x} d\sigma - k \int\limits_{(\sigma)} \Psi^* \sin kx \cos\beta\, d\sigma,$$

$$(12)\qquad 0 = \int\limits_{(\sigma)} \frac{\partial \overline{\Psi^{**}}}{\partial x} d\sigma - k \int\limits_{(\sigma)} \Psi^{**} \sin kx \cos\beta\, d\sigma.$$

In beiden Gleichungen ist das erste Integral, wie durch den Strich über Ψ^* usw. angedeutet wird, über die Fläche der Mündung, das zweite über die feste Wand der Röhre zu erstrecken. Diese zweiten Integrale sind aber nur dort von Null verschieden, wo $\cos\beta$ und $\sin kx$ von Null verschieden sind, also nur an den nichtzylindrischen Teilen der Röhre. Bei reinzylindrischen Röhren,

1) Dies ist die einzige Möglichkeit, um die Gleichung für alle Zeiten zu befriedigen.

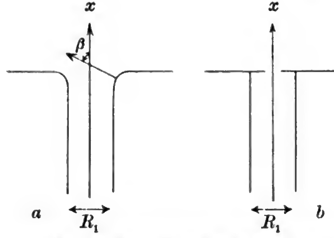


Fig. 55. Zwei verschiedene Formen der Röhrenmündung.

auch solchen, die oben bei $x = 0$ durch eine ebene Wand mit einer Öffnung verschlossen sind, welche kleiner ist als der Röhrenquerschnitt Q, (vgl. Fig. 55b) fallen diese zweiten Integrale ganz weg.

II. Außenraum auf Seite der positiven x, begrenzt von der yz-Ebene und einer um den Koordinatenursprung konstruierten Halbkugelfläche von großem Radius, die in die Region (6) der Halbkugelwellen fällt (Gebiet 7 von Nr. 71).

In diesem Raume soll die Funktion Φ die Form haben

$$(13)\qquad \Phi = \frac{1}{2r_{,}}\cos(kr_{,} - 2\pi Nt) + \frac{1}{2r_{,,}}\cos(kr_{,,} - 2\pi Nt).$$

Dabei ist $r_{,}$ die Entfernung des Punktes x, y, z, des Aufpunktes, für den das Potential Ψ gilt, von einem gewissen Punkte dieses Raumes mit den Koordinaten α, β, γ; $r_{,,}$ ist die Entfernung des Aufpunktes von dem Punkte mit den Koordinaten $-\alpha$, β, γ, der das Spiegelbild des Punktes α, β, γ inbezug auf die yz-Ebene ist. Φ stellt somit das Geschwindigkeitspotential für eine von α, β, γ ausgehende und an der yz-Ebene reflektierte Kugelwelle dar. Der Punkt $-\alpha$, β, γ, der fiktive Erregungspunkt des zweiten Kugelwellenzuges, liegt übrigens außerhalb des hier betrachteten Gebietes 7.

Wendet man nun den Greenschen Satz in diesem von der yz-Ebene und der fernen Halbkugel begrenzten Raum auf die obige Funktion Φ und das gesuchte Potential Ψ an, das von der Form (6) sein muß, so ist zu berücksichtigen, daß zwar Ψ in diesem Raum überall stetig und endlich ist, daß aber Φ im Punkte α, β, γ wo $r_{,} = 0$ ist, unendlich wird. Man muß also bei der Ausführung der Integrationen in Gl. (1a) bezw. (2) den Punkt α, β, γ und seine unmittelbare Umgebung ausschließen, z. B. indem man eine Kugel mit verschwindend kleinem Radius um ihn herumlegt. Dadurch wird die Zahl der Begrenzungsflächen des Raumes um eine, nämlich diese Kugelfläche, vermehrt, was bei der Auswertung der Oberflächenintegrale in Betracht kommt. Man erhält mit Rücksicht

hierauf durch Ausführung der Integrationen die Beziehung, daß unter diesen Umständen der Ausdruck

$$\int\limits_{(\sigma)} \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\sigma - \int\limits_{(\sigma)} \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} d\sigma$$

nicht gleich Null ist, sondern proportional dem Wert Ψ_α, den die im Punkte α, β, γ stetig bleibende Funktion Ψ dort besitzt. Bei der besonderen Form, die Φ hier hat, wird der Proportionalitätsfaktor gleich $2\pi \cos 2\pi N t$, so daß man in Gebiet 7 erhält

$$(14) \qquad \int\limits_{(\sigma)} \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\sigma - \int\limits_{(\sigma)} \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} d\sigma = 2\pi \Psi_\alpha \cos 2\pi N t.$$

Durch Ausführung der Integrationen an den verschiedenen Teilen der Oberfläche erhält man hieraus die Gleichung

$$(15) \qquad \mathfrak{C} - \int\limits_{(\sigma)} \frac{\partial \overline{\Psi}}{\partial x} \frac{\cos(k r, - 2\pi N t)}{r,} d\sigma = 2\pi \Psi_\alpha \cos 2\pi N t.$$

Hier ist das Oberflächenintegral nur noch über die Mündung der Röhre zu erstrecken; $\mathfrak{C}$ bedeutet eine Konstante, die den Wert des Integrals über die weit entfernte Kugelfläche darstellt.

Führt man nun in (15) für Ψ seinen Wert nach Gl. (6) ein und löst die Kosinusfunktion der Winkelsumme nach den bekannten goniometrischen Formeln auf, so erhält man links Glieder, welche Quadrate und Produkte von $\cos 2\pi N t$ und $\sin 2\pi N t$ enthalten. Drückt man diese durch $\cos 4\pi N t$ und $\sin 4\pi N t$ usw. aus, faßt die Glieder mit gleichem Argument der Winkelfunktionen zusammen und setzt dann einzeln gleich Null 1) die von der Zeit unabhängigen Glieder, 2) den Faktor von $\cos 4\pi N t$, 3) den Faktor von $\sin 4\pi N t$, so erhält man die drei Gleichungen

$$(16) \qquad \begin{cases} \mathfrak{C} = \pi \Psi_\alpha{}^* + \frac{1}{2} \int\limits_{(\sigma)} \left(\frac{\partial \overline{\Psi^*}}{\partial x} \frac{\cos k r,}{r,} + \frac{\partial \overline{\Psi^{**}}}{\partial x} \frac{\sin k r,}{r,} \right) d\sigma, \\ 0 = \pi \Psi_\alpha{}^* + \frac{1}{2} \int\limits_{(\sigma)} \frac{\partial \overline{\Psi^*}}{\partial x} \frac{\cos k r,}{r,} d\sigma - \frac{1}{2} \int\limits_{(\sigma)} \frac{\partial \overline{\Psi^{**}}}{\partial x} \frac{\sin k r,}{r,} d\sigma, \\ 0 = \pi \Psi_\alpha{}^{**} + \frac{1}{2} \int \frac{\partial \overline{\Psi^*}}{\partial x} \frac{\sin k r,}{r,} d\sigma + \frac{1}{2} \int \frac{\partial \overline{\Psi^{**}}}{\partial x} \frac{\cos k r,}{r,} d\sigma. \end{cases}$$

Hier sind die Integrationen nur noch über die Röhrenmündung zu erstrecken. Durch die beiden letzten Gleichungen (16) ist der

Wert von Ψ^* und Ψ^{**} für alle Punkte auf Seite der positiven x gegeben, wenn die Werte von $\frac{\partial \overline{\Psi^*}}{\partial x}$ und $\frac{\partial \overline{\Psi^{**}}}{\partial x}$ in der Öffnung der Röhre bekannt sind. Die erste der drei Gleichungen läßt sich übrigens aus den beiden anderen ableiten.

Durch Einsetzen der aus diesen beiden Gleichungen (16) folgenden Werte Ψ_α^* und Ψ_α^{**} in (6) erhält man Ψ_α, nämlich

$$
(17)\quad \begin{cases} \Psi_\alpha = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(\sigma)} \frac{\partial \overline{\Psi^*}}{\partial x} \frac{\cos(kr_, - 2\pi N t)}{r_,} d\sigma \\ \qquad + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(\sigma)} \frac{\partial \overline{\Psi^{**}}}{\partial x} \frac{\sin(kr_, - 2\pi N t)}{r_,} d\sigma; \end{cases}
$$

und dies wird, wenn der Punkt $\alpha\beta\gamma$ in große Entfernung rückt, und Polarkoordinaten

$$
\alpha = \varrho \cos\omega, \quad \beta = \varrho \sin\omega \cos\vartheta, \quad \gamma = \varrho \sin\omega \sin\vartheta
$$

eingeführt werden, durch eine der früheren (vgl. Anm. auf S. 203) ähnliche Umformung zu

$$
(17\text{a})\qquad \Psi = \frac{M}{\varrho}\cos(k\varrho - 2\pi N t) - \frac{M_1}{\varrho}\sin(k\varrho - 2\pi N t),
$$

wobei

$$
(18)\quad \begin{cases} M = -\frac{1}{2\pi}\iint\left(\frac{\partial \overline{\Psi^*}}{\partial x}\cos k\varepsilon + \frac{\partial \overline{\Psi^{**}}}{\partial x}\sin k\varepsilon\right) dy\,dz \\ M_1 = -\frac{1}{2\pi}\iint\left(\frac{\partial \overline{\Psi^{**}}}{\partial x}\cos k\varepsilon - \frac{\partial \overline{\Psi^*}}{\partial x}\sin k\varepsilon\right) dy\,dz \end{cases}
$$

$$
\varepsilon = y \sin\omega \cos\vartheta + z \sin\omega \sin\vartheta .
$$

Auch hier ist die Integration nur über die Mündung zu erstrecken.

III. In derselben Weise wird der Greensche Satz auf einen Raum angewandt, der zwischen einem Röhrenquerschnitt im Gebiet der ebenen Wellen und einer Halbkugelfläche im Gebiet der Kugelwellen liegt. Für die Funktionen Ψ und Φ der Gl. (2) wird Ψ^* und Ψ^{**} gesetzt; da diese beiden der Gl. (3) genügen, so gilt hier die Gl. (2a), und durch Ausführung der Integrationen erhält man

$$
(19)\qquad 0 = A\mathfrak{B}Q + k\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \int_0^{2\pi} d\vartheta (M^2 + M_1^2)\sin\omega .
$$

IV. Zuletzt wird der Satz noch angewandt auf den inneren Raum der Röhre von der Mündungsebene bis zu einem Querschnitt im Gebiet der ebenen Wellen. Für Ψ wird Ψ^* und für Φ wird $\sin kx$ gesetzt. Auch für diese beiden Funktionen gilt Gl. (2a) und man erhält schließlich

$$QB + \int_{(\sigma)} \Psi^* \cos kx \cos\beta \, d\sigma - \int_{(\sigma)} \Psi^* d\sigma = 0. \tag{20}$$

Das erste Integral ist über den nichtzylindrischen Teil der Röhrenwand auszudehnen, so weit daselbst $\cos\beta$ von Null verschieden ist, das zweite wieder über die Röhrenmündung.

73. Berechnung der Konstanten in den Potentialwerten. Die so gewonnenen Beziehungen, die Gleichungen (11), (12), (16), (18), (19), (20), führen die Werte der Koeffizienten A, B, $\mathfrak{B}$, M, M_1 und die Werte der Funktionen Ψ^* und Ψ^{**} auf gewisse Integrale zurück, in denen nur die Werte vorkommen, welche Ψ^* und Ψ^{**} sowie ihre Differentialquotienten teils in der Röhrenmündung selbst, teils in dem nichtzylindrischen Teil der Röhrenwand haben. Diese Ausdrücke vereinfachen sich wesentlich, wenn, wie angenommen wird, die Dimensionen der Mündung und die Länge des nichtzylindrischen Teiles der Röhre verschwindend klein sind gegen die Wellenlänge.

In diesem Falle ist $k\varepsilon$ klein gegen 1. Vernachlässigt man Größen von der Ordnung $k\varepsilon$ gegen 1, so gehen die Gleichungen (11), (12) und (18) über in

$$AQ = \int \frac{\partial \overline{\Psi^*}}{\partial x} d\sigma, \tag{11a}$$

$$0 = \int \frac{\partial \overline{\Psi^{**}}}{\partial x} d\sigma - k^2 \int \Psi^{**} x \cos\beta \, d\omega, \tag{12a}$$

$$M = -\frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial \overline{\Psi^*}}{\partial x} d\sigma = -\frac{AQ}{2\pi}. \tag{18a}$$

Ferner reduziert sich der Wert von M_1 auf verschwindend kleine Größen, kann also neben M vernachlässigt werden und (19) ergibt, da M dann unabhängig von den Winkeln ϑ und ω wird,

$$A\mathfrak{B}Q = -2\pi k M^2. \tag{19a}$$

Aus (18) und (19a) folgt

$$\mathfrak{B} = kM = -\frac{kAQ}{2\pi}, \tag{21}$$

und schließlich aus (20)

$$QB = \int \overline{\Psi^*}\, d\sigma - \int \Psi^* \cos\beta\, d\sigma, \tag{20a}$$

das erste Integral über die Öffnung, das zweite über den nichtzylindrischen Wandteil der Röhre erstreckt. B läßt sich hieraus nicht genauer bestimmen, nur seine Größenordnung im Vergleich zu A läßt sich feststellen. Zunächst ergibt sich aus den obigen Gleichungen, daß $AQ = 2\pi M$ und $\varepsilon\, \overline{\Psi^*}$ Größen von gleicher Ordnung sind. Aus (20a) folgt, daß QB gleich den Werten von Ψ^* integriert über eine Fläche von der Größenordnung Q ist, also selbst von der Größenordnung $\overline{\Psi^*} Q$ ist. Daher ist B von der Größenordnung $\overline{\Psi^*}$ oder $\frac{AQ}{\varepsilon}$ oder $A\varepsilon$, wenn Q von der Größenordnung ε^2 ist. Das Verhältnis $\frac{B}{A}$ hängt von der Form der Mündung ab, aber nicht merklich von k, so lange die Lineardimensionen des Querschnitts Q und die Länge des nichtzylindrischen Teiles der Röhre klein sind gegen die Wellenlänge.

Setzt man

$$B = -\frac{A}{k} \operatorname{tg} k\alpha, \tag{22}$$

wobei offenbar $\operatorname{tg} k\alpha$ von der Größenordnung $k\varepsilon$, also klein gegen 1 ist, und führt nun die Größen B und $\mathfrak{B}$ nach (21) und (22) in den Ausdruck (4a) in Nr. 71 für das Potential der ebenen Wellen in der Tiefe der Röhre ein, so erhält man daselbst

$$\Psi = \frac{A}{k \cos k\alpha} \sin k(x-\alpha) \cos 2\pi N t - \frac{AQk}{2\pi} \cos kx \sin 2\pi N t. \tag{23}$$

Die zugehörige Potentialfunktion an den weit entfernten Stellen des freien Raumes wird mit dem Werte (21) für M nach (5) bezw. (17a)

$$\Psi = -\frac{AQ}{2\pi} \frac{\cos(k\varrho - 2\pi N t)}{\varrho}. \tag{24}$$

Hierbei bedeutet A eine willkürliche Amplitudenkonstante, und α eine Größe, die für jede Röhrenform besonders bestimmt werden muß, die sogenannte Mündungskorrektion.

74. Lage der Knoten und Bäuche in der Röhre. Reduzierte Röhrenlänge. Vornehmlich interessiert uns das Potential Ψ im Innern der Röhre, weil aus ihm der Bewegungszustand daselbst

zu erschließen ist. Wie sich zeigt, sind dort ebene stehende Wellen vorhanden, aber die Schwingungsfigur, das Momentbild der Schwingung, wenn man so sagen darf, in einem Längsschnitt der Röhre hat nicht die einfache Sinusform, wie bei der elementaren Theorie. Das kommt daher, weil die Grenzbedingungen an der Öffnung andere sind. Die Grenzbedingungen am inneren Röhrenende können übrigens noch beliebig gewählt werden; es kann dort ein fest geschlossenes Ende sein oder die ebene Verschlußplatte kann daselbst erzwungene Schwingungen ausführen, durch welche die Wellen in der Röhre erregt werden. Im ersten Falle muß die Erregung der Wellen im Außenraum erfolgen. Nötig ist nur, daß die Erregung immer so beschaffen ist, daß irgendwo im inneren Teil der Röhre ebene stehende Wellen entstehen.

Aus dem Potential läßt sich der Bewegungszustand, die Stärke und Phasen der in der Röhre erregten Schwingungen für verschiedene Erregungsweisen ableiten; ferner läßt sich die Schwingungsfigur, d. h. die Lage der Maxima und Minima (Bäuche und Knoten) der Geschwindigkeit, der Verdichtung usw. und die davon abhängige Höhe der „Eigentöne" oder besser der „Töne stärkster Resonanz" der Röhre bestimmen. Die Geschwindigkeit ist

$$(25)\quad u = \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{A}{\cos k\alpha} \cos k(x-\alpha) \cos 2\pi N t + \frac{A Q k^2}{2\pi} \sin kx \sin 2\pi N t.$$

Dieser Ausdruck läßt sich schreiben

$$(25a)\qquad u = \frac{\partial \Psi}{\partial x} = J \cos(2\pi N t + \tau),$$

wenn man setzt

$$(26)\qquad \begin{cases} J = A \sqrt{\dfrac{\cos^2 k(x-\alpha)}{\cos^2 k\alpha} + \dfrac{k^4 Q^2}{4\pi^2} \sin^2 kx}, \\ \operatorname{tg} \tau = -\dfrac{k^2 Q \sin kx \cos k\alpha}{2\pi \cos k(x-\alpha)}. \end{cases}$$

Die Werte $x = x'$, für welche J^2 ein Maximum oder Minimum wird, ergeben sich aus der Gleichung

$$(27)\qquad \operatorname{tg} 2k(x'-\alpha) = \frac{k^4 Q^2 \sin k\alpha \cos^3 k\alpha}{2\pi^2\left(1 - \dfrac{k^4 Q^2}{4\pi^2} \cos 2k\alpha \cos^2 k\alpha\right)}.$$

Daraus folgt wegen der Periodizität der Tangensfunktion mit der Periode π, daß die x'-Werte um die Strecke $\frac{\pi}{2k} = \frac{\lambda}{4}$, d. h. um

eine Viertelwellenlänge auseinanderliegen. Ist x_0' die kleinste Wurzel der Gl. (27), so sind sämtliche Wurzeln dargestellt durch

$$x' = x_0' + \mathfrak{a}\frac{\lambda}{4} = x_0' + \frac{\mathfrak{a}\pi}{2k}. \qquad (\mathfrak{a} = 0, 1, 2 \ldots) \tag{28}$$

Das ist dasselbe Resultat wie bei der elementaren Theorie, nur x_0' hat einen anderen Wert als dort. Es folgt dabei natürlich immer auf ein Maximum ein Minimum usf., sodaß die Maxima um eine halbe Wellenlänge voneinander entfernt sind und ebenso die Minima.

Die erste Wurzel x_0', also die Entfernung des ersten Geschwindigkeitsminimums (Knoten) von der Mündung, ist nicht gleich einer Viertelwellenlänge wie in der elementaren Theorie, sondern kleiner. Sie ist leicht zu berechnen, wenn man α kennt. Ist, wie immer angenommen werden soll, k^2Q eine unendlich kleine Größe, so kann man näherungsweise die rechte Seite von (27) gleich Null setzen und diese Gleichung wird dann einfacher

$$\operatorname{tg} 2k(x' - \alpha) = 0. \tag{27a}$$

Danach wird J^2 ein örtliches Maximum

$$\left\{\begin{array}{lll} & J^2_{max} = \dfrac{A^2}{\cos^2 k\alpha}, & \\ \text{wenn} & 2k(x' - \alpha) = 2\mathfrak{a}\pi, & (\mathfrak{a} = 0, 1, 2 \ldots) \\ \text{also} & \cos k(x' - \alpha) = \pm 1 & \end{array}\right. \tag{29}$$

ist; und J^2 wird ein (örtliches) Minimum

$$\left\{\begin{array}{lll} & J^2_{min} = A^2 \dfrac{k^4 Q^2}{4\pi^2} \cos^2 k\alpha, & \\ \text{wenn} & 2k(x' - \alpha) = (2\mathfrak{a} + 1)\pi, & (\mathfrak{a} = 0, 1, 2 \ldots) \\ \text{also} & \cos k(x' - \alpha) = 0 & \end{array}\right. \tag{30}$$

ist. Die Minima (Knoten der Geschwindigkeit) werden also nicht Null, wie in der elementaren Theorie, sondern nur sehr klein von der Ordnung k^2Q.

Das erste Maximum (Geschwindigkeitsbauch) mit $\mathfrak{a} = 0$ würde bei $x' = \alpha$, also, da α positiv ist, bereits außerhalb der Röhre vor der Mündung liegen. Es ist das die Stelle, welche in ihrem Bewegungszustand der Mündungsebene in der elementaren Theorie entspricht. Rechnet man die Lage der Knoten und Bäuche von dieser Stelle $x = \alpha$, statt von der Mündungsebene $x = 0$ ab, so er-

hält man die von der elementaren Theorie her bekannten Beziehungen. Helmholtz nennt die Strecke $\alpha - x$ die reduzierte Länge des Röhrenstückes x[1]).

Die Schwingungsphasen für Maximum und Minimum sind verschieden, sie liegen um eine Viertelschwingungsdauer auseinander. Dies Resultat weicht vollständig von der elementaren Theorie ab, bei der ja alle Punkte des ganzen Innenraumes der Röhre stets gleiche Phase haben. Es folgt aus Gl. (25 a) und (26). Am Orte der Maxima (Bäuche) der Geschwindigkeit wird nämlich $\operatorname{tg}\tau$ verschwindend klein von der Ordnung $k^2 Q$, da dort $\cos k(x-\alpha) = \pm 1$ ist; also wird die Phasenkonstante $\tau = \mathfrak{a}\pi$. Am Ort der Minima (Knoten) der Geschwindigkeit wird nahezu $\operatorname{tg}\tau = \infty$, da dort $\cos k(x-\alpha) = 0$ ist; also wird $\tau = (\mathfrak{a} + \frac{1}{2})\pi$.

Für die Verdichtung s ergeben sich ganz entsprechende Sätze. Es wird

$$(31) \quad \begin{cases} s = -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \Psi}{\partial t} = \dfrac{A}{c\cos k\alpha}\sin k(x-\alpha)\sin 2\pi N t \\ \qquad\qquad + \dfrac{AQk^2}{2\pi c}\cos kx \cos 2\pi N t. \end{cases}$$

Dies läßt sich schreiben

$$(31\,\mathrm{a}) \qquad s = L\sin(2\pi N t + \tau'),$$

wenn

$$(32) \quad \begin{cases} L = \dfrac{A}{c}\sqrt{\dfrac{\sin^2 k(x-\alpha)}{\cos^2 k\alpha} + \dfrac{k^4 Q^2 \cos^2 kx}{4\pi^2}}, \\ \operatorname{tg}\tau' = \dfrac{k^2 Q \cos kx \cos k\alpha}{2\pi \sin k(x-\alpha)} \end{cases}$$

gesetzt wird. Die Bedingungsgleichung für die Lage der Maxima und Minima von L^2 ist dieselbe wie für die von J^2. Die ausgezeichneten Werte der Verdichtung fallen also mit denen der Geschwindigkeit zusammen, aber in der Weise, daß örtliches Maximum der Verdichtung auf Minimum der Geschwindigkeit fällt und umgekehrt[2]).

1) Dabei ist zu beachten, daß die Röhre hier auf Seite der negativen x liegt, so daß also $-x$ eine positive Größe, $\alpha - x$ also die Summe zweier positiven Größen ist.

2) Nach Anmerkung 34 in der Ostwaldschen Klassikerausgabe der Helmholtzschen Abhandlung folgt diese Reziprozität am einfachsten daraus, daß der Wert der Summe $c^2 L^2 + J^2$ von x unabhängig ist, so daß, wenn J in dieser Summe ein Minimum ist, L ein Maximum sein muß usw.

An den Orten der Maxima (Bäuche) ist $\operatorname{tg} \tau' = 0$, oder eigentlich nur verschwindend klein, also wird dort $\tau' = \mathfrak{a}\pi$. An den Orten der Minima (Knoten) ist $\operatorname{tg} \tau' = \infty$, da dort $\sin k(x - \alpha) = 0$ ist, also wird dort $\tau' = (\mathfrak{a} + \frac{1}{2})\pi$. Auch hier liegen die Phasen um eine Viertelschwingung auseinander. Man kann nun auch die Werte, welche Verdichtung und Geschwindigkeit an diesen Bauch- bezw. Knotenstellen haben, hinschreiben:

$$(33) \quad \left\{\begin{array}{l} \text{Knoten von } \mathfrak{u} \\ \text{Bauch von } s \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} s = \pm \dfrac{A}{c \cos k\alpha} \sin 2\pi N t, \\ \mathfrak{u} = \pm \dfrac{AQk^2 \cos k\alpha}{2\pi} \sin 2\pi N t, \end{array}$$

$$(33\,\text{a}) \quad \left\{\begin{array}{l} \text{Bauch von } \mathfrak{u} \\ \text{Knoten von } s \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} s = \pm \dfrac{AQk^2 \cos k\alpha}{2\pi c} \cos 2\pi N t, \\ \mathfrak{u} = \pm \dfrac{A}{\cos k\alpha} \cos 2\pi N t. \end{array}$$

An diesen ausgezeichneten Stellen haben also Verdichtung s, sowie Druck p und Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$ gleiche Phase; ihre Maxima fallen zeitlich zusammen und ebenso ihre Minima. Diese Phasengleichheit besteht aber nur für die Bauch- und Knotenstellen. An allen zwischenliegenden Punkten, wo weder $\sin k(x - \alpha)$ noch $\cos k(x - \alpha)$ nahezu Null sind, sind sowohl $\operatorname{tg} \tau$ als auch $\operatorname{tg} \tau'$ beide sehr kleine Größen, und es wird deshalb dort nahezu

$$(34) \qquad s = L \sin 2\pi N t, \qquad \mathfrak{u} = J \cos 2\pi N t,$$

wobei die allgemeinen Werte von L und J nach Gl. (32) und (26) einzusetzen sind. An allen diesen Zwischenpunkten sind also die zeitlichen Maxima von Verdichtung s (bezw. Druck p) und Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$ um nahezu eine Viertelschwingung auseinander.

75. Bewegungszustand und Form der Wellen in der Röhre. Die Bewegung ist ziemlich kompliziert. Zu ihrer genaueren Feststellung muß man den zeitlichen Verlauf betrachten. Bisher sind nur die Stellen bestimmt worden, wo die größten und kleinsten überhaupt vorkommenden Verschiebungen und Geschwindigkeiten, sowie Dichteänderungen stattfinden, die Bäuche und Knoten; und die absolute Größe dieser Maximal- und Minimalwerte ist in den Gleichungen (29) und (30) für die Geschwindigkeit angegeben. Aus (33) und (33a) sind diese Werte ebenfalls sofort zu entnehmen, auch für die Dichteänderung; es sind einfach die Amplituden der dort stehenden Sinus- und Kosinusfunktionen der Zeit.

Man darf nun aber nicht annehmen, daß zu allen Zeiten an den Bäuchen die Bewegung größer, an den Knoten kleiner ist als an allen anderen Stellen. So ist es zwar bei den stehenden ebenen Schwingungen der elementaren Theorie, aber bei der hier vorliegenden Bewegung trifft dies nicht zu. Bildet man Momentbilder der Schwingungen zu verschiedenen Zeiten, so liegen die Maxima der Bewegung und die Minima keineswegs immer an den Bauch- und Knotenstellen, sondern auch an Stellen dazwischen. Die Maxima der Verschiebung und Geschwindigkeit, und zwischen ihnen die Minima, gleiten als Welle die Röhre entlang; zu gewissen Zeiten treffen sie dabei an den Bauch- bezw. Knotenstellen ein. Und es zeigt sich nun, daß sich ihre absoluten Werte beim Vorwärtsschreiten ändern. Immer wenn ein Maximum an einen Bauch kommt, nimmt es besonders hohen Wert an; ein Minimum nimmt besonders kleinen Wert an, wenn es an einen Knoten gelangt. Das Entsprechende gilt für die Maxima und Minima der Verdichtung.

Dieses Verhalten ergibt sich aus der Form des Potentials für das Rohrinnere. Die Schwingungsfigur zu irgend einer Zeit ist die Kurve, welche die Geschwindigkeit $\mathfrak{u} = \frac{\partial \Psi}{\partial x}$ als Funktion von x zu dieser Zeit darstellt. Sie ist nach (25) in Nr. **74** zu konstruieren. Die Lage der Maxima und Minima dieser Kurve ergibt sich durch Auflösung der Gleichung $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = 0$ nach x. Statt dessen kann man die Gleichung $\Psi = 0$ benutzen und nach x auflösen; denn in diesem Gebiete der ebenen Wellen gilt ja die Gleichung $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + k^2 \Psi = 0$. Man hat also die rechte Seite von (4a) in Nr. **71** gleich Null zu setzen und erhält die Gleichung

$$(35)\quad \frac{A}{k} \cos 2\pi N t \sin kx + (B \cos 2\pi N t + \mathfrak{B} \sin 2\pi N t) \cos kx = 0 .$$

Daraus folgt für die momentane Lage x der Extremwerte die Gleichung

$$(35\text{a})\qquad \operatorname{tg} kx = \operatorname{tg} k\alpha + \frac{k^2 Q}{2\pi} \operatorname{tg} 2\pi N t ,$$

wenn man die Werte für B und $\mathfrak{B}$ nach Gl. (22) und (21) in Nr. **73** einsetzt. Mit Rücksicht darauf, daß $k^2 Q$ und $k\alpha$ kleine Größen sind, ergibt sich hiernach folgendes Verhalten. Für $t = 0$ geht (35a) über in

$$(36)\qquad \operatorname{tg} kx = \operatorname{tg} k\alpha$$

Zur Zeit $t=0$ liegen also die Extremwerte der Geschwindigkeit u da, wo $kx = k\alpha \pm \mathfrak{a}\pi$ ist. Daraus ergibt sich speziell die Lage x der Maxima und Minima:

$$(37)\quad \left\{\begin{array}{l} \text{Maxima von } u \text{ bei } x = \alpha - \frac{2\mathfrak{a}\pi}{k} = \alpha - 2\mathfrak{a}\frac{\lambda}{2}, \\ \text{Minima von } u \text{ bei } x = \alpha - \frac{(2\mathfrak{a}+1)\pi}{k} = \alpha - (2\mathfrak{a}+1)\frac{\lambda}{2} \end{array}\right\} \text{für } t=0,$$

wobei $\mathfrak{a} = 0, 1, 2 \ldots$ ist.

Diese Lösung der Gl. (36) ist natürlich ohne weiteres bekannt. Man kann sie graphisch erhalten, indem man die Kurven $\eta = \operatorname{tg} kx$ und $\eta_0' = \operatorname{tg} k\alpha$ als Funktionen der Abszisse x oder bequemer der Abszisse $kx = \xi$ aufträgt. Die Abszissen der Schnittpunkte beider Kurven bezw. Kurvenscharen sind die gesuchten ξ bezw. x (Fig. 56).

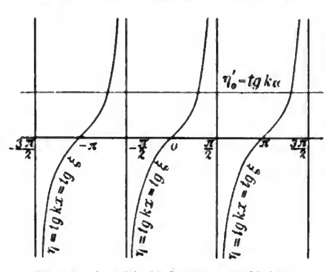


Fig. 56. Graphische Lösung der Gleichung (36) bezw. (35 a) zur Bestimmung der augenblicklichen Lage der Maxima und Minima der Geschwindigkeit der Luftteilchen.

Wächst nun t von Null an zu einem anderen Wert, so bleibt die Konstruktion bestehen. Insbesondere bleibt die Kurvenschar $\eta = \operatorname{tg} \xi$ unverändert; nur die Kurve η' ändert sich, sie bleibt aber eine Gerade und zwar Parallele zur ξ-Achse, deren Abstand von der ξ-Achse mit wachsendem t erst langsam, später aber immer schneller wächst, bis $t = \frac{1}{4N}$, d. h. gleich einer Viertelschwingungsdauer geworden ist. Dann ist ihre Entfernung $= \infty$. Bei diesem Emporsteigen der Geraden $\eta' = \operatorname{tg} k\alpha + \frac{k^2 Q}{2\pi} \operatorname{tg} 2\pi N t$ verschieben sich ihre Schnittpunkte mit der Kurvenschar $\eta = \operatorname{tg} kx$ nach wachsendem x hin und zwar alle gleich viel, so daß ihr gegenseitiger Abstand gewahrt bleibt $\left(\frac{\pi}{2}\right.$ wenn ξ, $\frac{\lambda}{2}$ wenn x Abszisse ist$\left.\right)$. Diese Verschiebung erfolgt anfangs sehr langsam, da $k^2 Q$ sehr klein ist und $\operatorname{tg} 2\pi N t$ bei kleinem t nur proportional t wächst, so daß die Gerade η' anfangs nur langsam emporsteigt. Erst wenn t größer als die Achtelperiode $\frac{T}{8} = \frac{1}{8N}$ geworden ist, steigt die Gerade η'

schneller und verschieben sich ihre Schnittpunkte mit $\eta = \operatorname{tg} kx$ schneller vorwärts. Bei $t = \frac{T}{4}$ ist die Geschwindigkeit dieses Vorrückens am größten. Sie wird dann wieder kleiner und in der Gegend von $\frac{T}{2}$ wieder sehr klein. Dann beginnt wieder dasselbe Spiel wie von $t = 0$ an. Die Abszissen der Schnittpunkte der Kurven η und η' geben nun die momentane Lage der Extremwerte der Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$ bezw. der Verschiebung u der Luftschichten an. Die eben geschilderte Art des Vorrückens gilt also für die Bewegung dieser Extremwerte (Maxima und Minima) in der Röhre. Eine ganz analoge Betrachtung zeigt, daß auch die Extremwerte der Verdichtung sich in dieser sprunghaften Weise vorwärts bewegen. Bei diesem Fortschreiten ändert sich nun auch, wie schon bemerkt, die absolute Größe dieser ausgezeichneten Werte. Sie ist am größten während des Stillstandes, am kleinsten während des schnellen Vorwärtseilens, wie man leicht erkennt, wenn man z. B. in (25) bezw. (25 a) $t = 0$ oder $t = \frac{T}{2} = \frac{1}{2N}$ setzt. Man erhält dann den größten überhaupt möglichen Wert, den $\mathfrak{u}$ annehmen kann. Das Entsprechende ist auch für Verdichtung und Druck nachweisbar. Übrigens ist die fortschreitende Bewegung von Verdichtung und Druck in der Phase um eine Viertelperiode gegen die Bewegung von Geschwindigkeit und Verrückung der Teilchen verschoben.

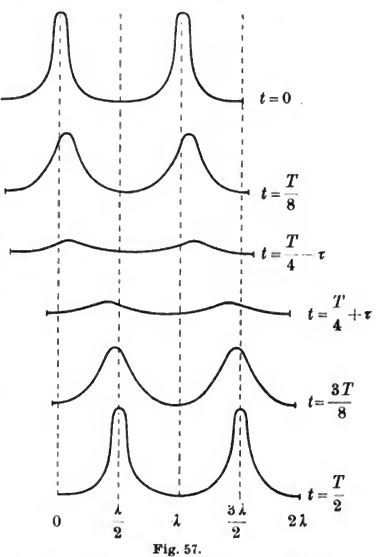


Fig. 57.
Fortbewegung der Wellen in der Röhre; λ Wellenlänge, T Schwingungsperiode, τ ein gegen T kleines Zeitintervall. Die Fortbewegung erfolgt hauptsächlich in der kurzen Zeit von $\frac{T}{4} - \tau$ bis $\frac{T}{4} + \tau$.

Bildlich läßt sich der Vorgang noch besser erläutern; er ist schematisch in Fig. 57 dargestellt. Der Vorgang ist derselbe, wie er auf einer Wasseroberfläche zu sehen sein würde, wenn die Wellen nicht gleichmäßig mit Beibehaltung ihrer Höhe fortschreiten, sondern wenn sie sich plötzlich emporbäumen, eine Reihe von hohen Kämmen bildend, die längere Zeit nahezu bewegungslos an ihrem Orte verharren; dann plötzlich auf geringere Höhe zusammensinken, dabei aber schnell um eine halbe Wellenlänge vorwärts eilen; an dem neuen Platz angekommen sich wieder bis zu voller Höhe emporbäumen und so daselbst einige Zeit verharren, bis das Spiel wieder weiter geht. Das ist das Bild, welches man sich nach der Helmholtzschen Theorie von dem Bewegungszustand der Luft in einer mit der Außenluft kommunizierenden Röhre zu machen hat. Es weicht sehr erheblich von der gewöhnlichen Vorstellung ab.

76. Mündungskorrektion verschiedener Röhren. Trotz dieser Abweichung in der Bewegungsform, die darin ihren Grund hat, daß bei der offenen Röhre ein dauernder Energieaustausch mit der äußeren Atmosphäre stattfindet, sind die Eigenschaften, welche die Helmholtzsche Theorie für eine solche Röhre ergibt, nur wenig von denen der elementaren Theorie verschieden. Der Hauptunterschied ist der, daß das erste Geschwindigkeitsmaximum (Verdichtungsknoten) nicht in der Mündung liegt, sondern um die Strecke α nach außerhalb verschoben ist, woraus sich eine scheinbare Längenänderung der Röhre (Vergrößerung der Länge um α) ergibt, die für die Berechnung der Wellenlänge und damit der Eigenschwingungszahl der Röhre als Pfeife in Betracht kommt. Diese Strecke α, die Mündungskorrektion, hängt übrigens außer von der Gestalt der Röhre noch von der Schwingungszahl ab, und hat deshalb für die verschiedenen Partialtöne einer Röhre verschiedene Werte. Die Berechnung der Werte von α für verschiedene Röhrenformen läßt sich ausführen, muß aber hier wegen Raummangel wegbleiben. Helmholtz hat dabei auch eine Röhrenform gefunden, für welche die Mündungskorrektion α Null wird, wo also der erste Verdichtungsknoten tatsächlich in der Mündungsebene liegt. Diese Röhre ist an der Mündung schwach trompetenartig erweitert.

Ist R der Radius der Öffnung, R_1 der Radius des zylindrischen Teiles der Röhre, so ergibt sich mit Vernachlässigung kleiner Größen die Mündungskorrektion

(38) $$\alpha = -\frac{B}{A} = \frac{\pi R_1^2}{2R} - \frac{\pi R}{4}.$$

Für eine rein zylindrische Röhre, bei der $R_1 = R$ ist, wird danach

(39) $$\alpha = \frac{\pi R}{4} = 0{,}7854\, R.$$

Die Korrektion wird Null, der erste Schwingungsbauch liegt also in der Öffnung, wenn

(40) $$R = R_1 \sqrt{2} = 1{,}4142\, R_1$$

ist. Das liefert die trompetenartig erweiterte Mündungsform.

Nach der Helmholtzschen Theorie läßt sich nun auch die Resonanz der Röhre bei verschiedener Art der Schwingungserregung behandeln. Ein solcher Fall ist der, wo das innere Ende der Röhre durch eine bewegliche ebene Platte verschlossen ist, die unter der Wirkung äußerer Kräfte erzwungene Schwingungen ausführt und in der eingeschlossenen Luft ebene Wellen erzeugt. Er ist auch nach der elementaren Theorie zu behandeln. Der andere Fall dagegen, daß die Erregung durch einen von außen kommenden Wellenzug erfolgt, ist für die elementare Theorie unzugänglich; auch der dritte Fall, bei dem die Erregung irgendwo im Innern der Röhre durch eine dort angebrachte Schallquelle erfolgt, läßt sich ebenfalls nach Helmholtz behandeln, wenn nur die Erregung an einer solchen Stelle erfolgt, daß sich in der Tiefe der Röhre noch ebene Wellen ausbilden können. Alle drei Fälle führen übrigens zu demselben Ergebnis, daß die Resonanz ein Maximum ist, wenn die Länge der Röhre vom unteren geschlossenen Ende an bis zu dem fiktiven oberen Ende bei $x = \alpha$ ein ungerades Vielfaches der Viertelwellenlänge des erregenden Tones ist. In allen drei Fällen liegt an dem unteren geschlossenen Ende ein Knoten der Geschwindigkeit (Bauch der Verdichtung), doch ist dies im ersten der drei Fälle nicht eine Stelle absoluter Ruhe, sondern nur eine solche geringster Bewegung. Ist die Röhrenlänge l, so ist zur Berechnung der Wellenlänge der Eigenschwingung die reduzierte Länge $l + \alpha$ zu benutzen, im übrigen gelten die aus der elementaren Theorie her bekannten Beziehungen (vgl. Nr. 35ff.).

Die gleiche Theorie läßt sich auf die als Resonatoren dienenden kubischen Pfeifen anwenden, d. h. auf gasgefüllte Hohlräume, die nach allen drei Dimensionen annähernd gleich ausgedehnt sind und die durch eine oder mehrere kleine Öffnungen in der Wand mit der Außenatmosphäre in Verbindung stehen. Raummangel verbietet hier die Darstellung dieser Anwendung, ebenso wie ein näheres Eingehen auf die etwas anders durchgeführte Resonatorentheorie von Kirchhoff[1]) und von Lord Rayleigh.[2])

---

1) G. Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik (Leipzig 1883); I. Bd. (Mechanik) 24. Vorl. S. 334.

2) Lord Rayleigh, Theory of Sound, Bd. II § 303 ff.

Namen- und Sachregister.

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

Auerbach, F., Physik in graphischen Darstellungen. 1373 Figuren auf 213 Tafeln mit erläuterndem Text. [X, 213 u. 28 S.] 4. 1912. Geh. ℳ 9.—, in Leinwand geb. ℳ 10.—

Brill, A., Vorlesungen zur Einführung in die Mechanik raumerfüllender Massen. Mit 27 Figuren. [X u. 236 S.] gr. 8. 1909. Geh. ℳ 7.—, in Leinwand geb. ℳ 8.—

—— das Relativitätsprinzip. Eine Einführung in die Theorie. Mit 6 Figuren. (Sonderabdruck aus Band XXI des Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.) [VI u. 30 S.] gr. 8. 1912. Geh. ℳ 1.20.

Bryan, G. H., Thermodynamics. An introductory Treatise dealing mainly with first Principles an their direct Applications. In englischer Sprache. [XIV u. 204 S.] gr. 8. 1907. Geb. ℳ 7.—

Burkhardt, H., Entwicklungen nach oszillierenden Funktionen und Integration der Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Bericht, erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. [XII, III u. 1804 S.] gr. 8. 1908. In 2 Halbbänden. Geh. je ℳ 30.—

Ebert, H., Lehrbuch der Physik. Nach Vorlesungen an der Technischen Hochschule zu München. In 2 Bänden. I. Band. Mechanik. Wärmelehre. Mit 168 Abbildungen. [XX u. 661 S.] gr. 8. 1911. In Leinwand geb. ℳ 14.—. [II. Band unter der Presse.]

Grimsehl, E., Lehrbuch der Physik. Zum Gebrauch beim Unterricht, bei akademischen Vorlesungen und zum Selbststudium. 2., vermehrte Auflage. Mit 1296 Figuren, 2 farbigen Tafeln und einem Anhang, enthaltend Tabellen physikalischer Konstanten und Zahlentabellen. [XVI u. 1262 S.] gr. 8. 1912. Geh. ℳ 15.—, in Leinwand geb. ℳ 16.—

Hamel, G., elementare Mechanik. Ein Lehrbuch, enthaltend: Eine Begründung der allgemeinen Mechanik; die Mechanik der Systeme starrer Körper; die synthetischen und die Elemente der analytischen Methoden, sowie eine Einführung in die Prinzipien der Mechanik deformierbarer Systeme. Mit 265 Figuren. [XVIII u. 634 S.] gr. 8. 1912. Geh. ℳ 16.—, in Leinwand geb. ℳ 18.—

Kielhauser, E. A., die Stimmgabel. Ihre Schwingungsgesetze und Anwendungen in der Physik. Eine auf fremden Untersuchungen fußende Monographie. Mit 94 Figuren. [VIII u. 188 S.] gr. 8. 1907. In Leinwand geb. ℳ 6.—

Klein, F., und **A. Sommerfeld,** über die Theorie des Kreisels. 4 Teile. gr. 8.

I. Teil. Die kinematischen und kinetischen Grundlagen der Theorie. [IV u. 196 S.] 1897. Geh. ℳ 5.60, geb. ℳ 6.60.

II. — Durchführung der Theorie im Falle des schweren symmetrischen Kreisels. [IV u. 315 S.] 1898. Geh. ℳ 10.—, geb. ℳ 11.—

III. — Die störenden Einflüsse. Astronomische und geophysikalische Anwendungen. [IV u. 247 S.] 1903. Geh. ℳ 9.—, geb. ℳ 10.—

IV. — Die technischen Anwendungen der Kreiseltheorie. Für den Druck bearbeitet und ergänzt von Fritz Noether. [IV u. S. 761—966.] 1910. Geh. ℳ 8.—, in Leinw. geb. ℳ 9.—

Kohlrausch, F., Lehrbuch der praktischen Physik. 11., stark vermehrte Auflage des Leitfadens der praktischen Physik. Mit 400 Figuren. [XXXIII u. 736 S.] gr. 8. 1910. In Leinwand geb. ℳ 11.—

—— kleiner Leitfaden der praktischen Physik. 2., vermehrte Auflage. 6.—10. Tausend. Mit zahlreichen Figuren. [XVIII u. 268 S.] gr. 8. 1907. In Leinwand geb. ℳ 4.—

Lanchester, F. W., Aerodynamik. Ein Gesamtwerk über das Fliegen. Aus dem Englischen übersetzt von C. und A. Runge. 2 Bände. gr. 8. In Leinwand geb.

I. Band. Mit Anhängen über die Geschwindigkeit und den Impuls von Schallwellen, über die Theorie des Segelfluges usw. Mit 162 Figuren und 1 Tafel. [XIV u. 360 S.] 1909. Geh. ℳ 12.—

II. — Aerodonetik. Mit Anhängen über die Theorie und Anwendung des Gyroskops, über den Flug der Geschosse usw. Mit 208 Figuren und einem Titelbild. [XIV u. 327 S.] 1911. Geb. ℳ 12.—

Lecher, E., Lehrbuch der Physik für Mediziner und Biologen. Mit 499 Abb. [VII u. 451 S.] gr. 8. Geh. ℳ 8.—, in Leinw. geb. ℳ 9.—

Lorentz, H. A., Abhandlungen über theoretische Physik. In 2 Bänden. Band I. Mit 40 Figuren. [IV u. 489 S.] gr. 8. 1907. Geh. ℳ 16.—, in Leinwand geb. ℳ 17.—. [Band II in Vorbereitung.]

—— Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern. Unveränderter Abdruck der 1895 bei E. J. Brill in Leiden erschienenen 1. Auflage. [III u. 138 S.] gr. 8. 1906. In Leinwand geb. ℳ 3.20.

—— **A. Einstein. H. Minkowski,** das Relativitätsprinzip. Eine Sammlung von Abhandlg. [IV u. 89 S.] gr. 8. 1913. Geh. ca. ℳ 2.50.

Marcolongo, R., theoretische Mechanik. Deutsch von H. E. Timerding. In 2 Bänden. gr. 8.

I. Band. Kinematik und Statik. Mit 110 Figuren. [VIII u. 346 S.] 1911. Geh. ℳ 10.—, geb. ℳ 11.—

II. — Dynamik und Mechanik der deformierbaren Körper. Mit 38 Figuren. [VII u. 344 S.] 1912. Geh. ℳ 10.—, geb. ℳ 11.—

Perry, J., Drehkreisel. Deutsche Ausgabe, besorgt von A. Walzel. 2. Auflage. Mit 62 Abbildungen und 1 Titelbild. [VIII u. 130 S.] 8. 1913. In Leinwand geb. ℳ 2.80.

—— höhere Analysis für Ingenieure. Autor. deutsche Bearbeitung von R. Fricke und Fr. Süchting. 2., verbess. u. erweit. Auflage. Mit 106 Fig. [XII u. 464 S.] gr. 8. 1910. In Leinw. geb. ℳ 13.—

Pockels, Fr., Lehrbuch der Kristalloptik. Mit 168 Figuren und 6 Doppeltafeln. [X u. 519 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. ℳ 16.—

Poincaré, H., sechs Vorträge über ausgewählte Gegenstände aus der reinen Mathematik und mathematischen Physik. Mit 6 Figuren. [IV u. 60 S.] gr. 8. 1910. Geh. ℳ 1.80, in Leinwand geb. ℳ 2.40.

Schuster, A., Einführung in die theoretische Optik. Autorisierte deutsche Ausgabe übersetzt von H. Konen. Mit 2 Tafeln und 185 Figuren. [XIV u. 413 S.] gr. 8. 1907. Geh. ℳ 12.—, in Leinwand geb. ℳ 13.—





Digitized by Google